Université de Nice
Ingo Waschkies
2013

Examen.

1. On note $\Delta^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1]$ et $x+y+z \leqslant 1\}$. On rappelle qu'une fonction affine $f : \Delta^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction du type $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que le maximum de f dans Δ^3 soit atteint en $(0, 1, 0)$.

   (b) Si $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1) = 0$ et $f(0, 0, 0) = -1$ donner tous les points dans lesquels f atteint son minimum et tous les points dans lesquels f atteint son maximum.

   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que le maximum de f dans Δ^3 soit atteint en $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que le maximum de f dans Δ^3 soit atteint en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

   1a) Il faut et il suffit que $b \geqslant a, c$ et $b \geqslant 0$.
   1b) Le minimum est atteint uniquement en $(0, 0, 0)$ et le maximum est atteint en les points $(x, 1 - x, 0)$ où $x \in [0, 1]$.
   1c) Il faut et il suffit que $a = b = c = 0$.
   1d) Il faut et il suffit que $a = b = c$ et $a \geqslant 0$.

2. On considère un jeu à information complète avec deux joueurs et la matrice de paiement suivante

$$\begin{pmatrix} & \mathsf{T1} & \mathsf{T2} \\ \mathsf{S1} & (1, 0) & (4, b) \\ \mathsf{S2} & (3, a) & (2, 0) \end{pmatrix}$$

   (a) Trouver en fonction de a et b les èquilibres de Nash (en stratégie pure) de ce jeu.

   (b) Écrire les fonctions de paiement des deux joueurs dans l'extension mixte du jeu.

   (c) Supposons que ce jeu n'admet aucun èquilibres de Nash en stratégie pure. Montrer qu'il existe un unique équilibre de Nash mixte que l'on précisera en fonction de a et b.

   (d) Dire en fonction de a et b combien déquilibres de Nashs existent en stratégies mixtes.

   2a) Tout d'abord on va établir le tableau des meilleures réponses:

	meilleure réponse de J1
T1	S2
T2	S1

		meilleure réponse de J2
S1	b<0	T1
	b=0	T1 et T2
	b>0	T2
S2	a<0	T2
	a=0	T1 et T2
	a>0	T1

Le premier tableau montre qu'il n'y a que deux équilibres de Nash possibles: en $(S1, T2)$ et en $(S2, T1)$.
Le deuxième tableau montre que $(S1, T2)$ est un EDN ssi $b \geqslant 0$ et $(S2, T1)$ est un EDN ssi $a \geqslant 0$.
2b)Fixons les notations: $J1$ joue $S1$ avec probabilité p et $J2$ joue $T1$ avec probabilité q. Les fonctions de paiement sont alors

$$P1(p, q) = -4pq + 2p + q + 2 \qquad\qquad P2(p, q) = -(a + b)pq + bp + aq$$

2c) On se place dans le cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Notons tout d'abord que toutes les meilleures réponses aux stratégies pures sont données par une seule stratégie pure - donc tout équilibre de Nash mixte qui fait intervenir une stratégie pure est en fait un équilibre pure.
Les fonctions de paiement sont

$$P1(p, q) = (-4q + 2)p + q + 2 \qquad\qquad P2(p, q) = (-(a + b)p + a)q + bp$$

Comme on est dans un jeu $2x2$ les équilibres de Nash mixtes sans stratégie pure sont exactement les stratégies pour lesquelles les fonctions de paiement sont constants (une fonction affine sur $[0, 1]$ qui atteint son maximum à l'intérieur de l'intervalle est constant). On doit donc résoudre

$$-4q + 2 = 0 \qquad\qquad -(a + b)p + a = 0$$

Donc $q = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{a}{a+b}$ (si $a + b = 0$ on doit avoir $a = 0$ ce qu'on a exclut). Notons que $\frac{a}{a+b} \in [0, 1]$ si et seulement si a et$b$ ont le même signe. On en déduit un EDNM $((\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ ssi $a, b > 0$ ou $a, b < 0$. En particulier c'est un EDNM dans le cas que le jeu n'admet aucun EDN pure.
2d) Il nous reste à étudier les ca $a, b = 0$.
Vu 2a) les candidats pure-mixte pour un EDNM sont alors $((1, 0), (q, 1 - q))$ si $b = 0$ et $((0, 1), (q, 1 - q))$ si $a = 0$.
On établit le tableau des meilleures réponses de $J1$ aux stratégies mixtes $(q, 1 - q)$ de $J2$.

	meilleure réponse de J1
$0 \leqslant q < \frac{1}{2}$	S1
$q = \frac{1}{2}$	S1 et S2
$\frac{1}{2} < q \leqslant 1$	S2

On obtient donc une infinité d'EDNM $((1,0),(q,1-q))$ si $b=0$ et $0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$ ainsi que $((1,0),(q,1-q))$ si $a=0$ et $\frac{1}{2} \leqslant q \leqslant 1$.
Juste pour finir l'étude on remarque que si J1 ne joue pas pure dans un EDNM, alors on a forcément $q=\frac{1}{2}$ et $a=b=0$ ce qui nous donne les EDNM $((p,1-p),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$.
On a donc montré qu'il y a un EDNM si $a,b \neq 0$ et a,b n'ont pas le même signe, trois EDNM si $a,b \neq 0$ et a,b ont le même signe et une infinité d'EDNM si $a=0$ ou $b=0$.

3. On considère un jeu bayésien à somme nulle avec deux joueurs. On suppose que le joueuer J2 a deux types de jeu notés A et B et que la probabilité que J2 est de type A est $\frac{2}{3}$. Les matrices de paiements sont

$$\text{type A} \begin{pmatrix} & T1 & T2 \\ S1 & 3 & 1 \\ S2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{type B} \begin{pmatrix} & T1 & T2 \\ S1 & -2 & 0 \\ S2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que les deux jeux A et B possèdent chacun un unique équilibre de Nash pure que l'on précisera.

   (b) Montrer que le bayésien possède un unique équilibre de Nash pure que l'on précisera.

3a) On constate facilement que $(S1, T2)$ est l'unique EDN de jeu A et $(S2, T1)$ est l'unique EDN de jeu B.
3b) On écrit le tableau des espérances de gain

$$\text{type A} \begin{pmatrix} & T1,T1 & T1,T2 & T2,T1 & T2,T2 \\ S1 & \frac{4}{3} & 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ S2 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit directement un unique EDNM en $(S2,(T2,T1))$.

On suppose maintenant qu'on est dans une situation de jeu avec signal. Le type de jeu du joueur 2 ne fait que varier la fonction de paiement et non pas les stratégies (ceci veut dire que la première stratégie du type A est la même que la première stratégie du type B etc). Le joueuer 2 (qui connaît son type) joue en premier et communique son choix. On dira que J2 envoie un signal trompeur si son choix ne correspond pas à la stratégie de l'équilibre de Nash pure. On rappelle que les joueurs jouent raisonablement - c'est-à-dire quíls maximisent leur gain si possible. Comme avant la probabilité que J2 est de type A est $\frac{2}{3}$

   (a) On va supposer que J1 considère que J2 n'envoie jamais de signal trompeur. Calculer les gains de J1 et J2. Est-ce que J2 a interêt à envoyer un signal trompeur dans un jeu de type A? Dans un jeu de type B?

   (b) On va supposer que J2 envoie toujours un signal trompeur et que J1 le sait. Est-ce que J2 regrettera son choix dans un jeu de type A? Dans un jeu de type B?

(c) On va supposer que J1 soupçonne avec une probabilité de p que J2 envoie un signal trompeur. Le joueur J2 décide d'envoyer toujours un signal trompeur. Est-ce que J2 regrettera son choix dans un jeu de type A? Dans un jeu de type B?

(d) On va supposer que J2 essaie dans 3 cas sur 4 de tromper son adversaire si son gain pourrait devenir strictement plus grand (au sens de (a)) et qu'il essaie dans 1 cas sur 4 de tromper son adversaire si son gain serait inférieur ou égal (au sens de (a)). Comment doit jouer J1 s'il est au courant de ce comportement de J2?

(e) On va supposer que J2 a la réputation connue pour tout le monde qu'il essaie dans 3 cas sur 4 de tromper son adversaire si son gain pourrait devenir strictement plus grand (au sens de (a)) et qu'il essaie dans 1 cas sur 4 de tromper son adversaire si son gain serait inférieur ou égale (au sens de (a)). Dans une extension mixte du jeu est-ce que J2 regretterait s'il jouait comme indique sa réputation.

(hors barème) Discuter s'il existe une situation d'équilibre de ce jeu (personne ne regrette son choix) en ajoutant éventuellemtn plus d'hypothèses sur les comportements des joueurs.

3a2) Vu 3a) on voit que $T1$ est un signal trompeur ssi le jeu est de type A et $T2$ est trompeur ssi le jeu est de type B Comme J1 considère que J2 n'envoie jamais de signal trompeur il va penser pouvoir déduire du choix de J2 le type du jeu: si J2 joue $T1$ alors J1 considère que le jeu est de type B et sa meilleure réponse sera $S2$; si J2 joue $T2$ alors J1 considère que le jeu est de type A et sa meilleure réponse sera $S1$. Le jeu est donc $(S1, T2)$ ou $(S2, T1)$.

	type A	type B
(S1,T2)	(1,-1)	(0,0)
(S2,T1)	(1,-1)	(2,-2)

On en déduit que dans un jeu de type A le paiement ne varie pas si J2 envoie un signal trompeur et dans un jeu de type B le paiement de J2 est meilleur si J2 envoie un signal trompeur. J2 a donc un interêt à envoyer un signal trompeur dans un jeu de type B, il est indifférent dans un jeu de type A.

3b2) En toute généralité dans un jeu à somme nulle: si un joueur joue une stratégie qui évite les EDN, alors elle n'est pas prudente ce qui veut dire en particulier qu'il regrettera si l'autre joueur joue la meilleure réponse. Donc J2 regrettera de tromper si J1 est au courant de son comportement.

Plus concrètement on pourra aussi constater que si le jeu est de type A, alors les joueurs joueront $(S1, T1)$ et le paiement pour J2 serait -3 - il aurait mieux fait jouer $T2$ où il a au moins -1. Si le jeu est de type B, alors les joueurs joueront $(S2, T2)$ et le paiement pour J2 serait -3 - il aurait mieux fait jouer $T1$ où il a au moins -2.

3c) Par hypothèse si J2 joue $T1$ alors avec une probabilité p le joueuer J1 va penser que le jeu est de type A et il répond avec $S1$. Avec une probabilité $1-p$ il répond avec $S2$. Si J2 joue $T2$ alors avec une probabilité p le joueuer J1 va penser que le jeu est de type B et il répond avec $S2$. Avec une probabilité $1-p$ il répond avec $S1$.

Regardons les gains

	type A	probabilité
(S1,T1)	3	p
(S2,T1)	1	1-p
espérance	1+2p	

	type B	probabilité
(S1,T2)	0	1-p
(S2,T2)	3	p
espérance	3p	

Regardons aussi ce qui se passe si J2 joue autrement

	type A	probabilité
(S1,T2)	1	1-p
(S2,T2)	0	p
espérance	1- p	

	type B	probabilité
(S1,T1)	-2	p
(S2,T1)	2	1-p
espérance	2-4p	

On constate que $1-p \leqslant 1+2p$ avec égalité uniquement si $p=0$ donc J2 regrette son choix sauf si $p=0$.
On a $2-4p < 3p$ ssi $p > \frac{2}{7}$. Donc J2 regrette son choix dans un jeu de type B ssi $p > \frac{2}{7}$.
3c) Commençons par dire que vu le résultat de 3a2) le joueur essaiera de tromper son adversaire avec 25% de probabilité dans un jeu de type A et avec 75% dans un jeu de type B. Il en résulte que peu importe le type du jeu le joueur J2 joue T1 dans un cas sur 4. Autrement dit le joueur J1 ne peut rien déduire du type du jeu par le choix publié du joueur J2. Il doit donc considérer que le jeu est de type A avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ peu importe le choix de J2. Calculons son espérances de gain

(S1,T1)	$\frac{2}{3}\frac{1}{4} * 3 + \frac{1}{3}\frac{1}{4} * (-2) = \frac{1}{3}$
(S2,T1)	$\frac{2}{3}\frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{4} * 2 = \frac{1}{3}$
(S1,T2)	$\frac{2}{3}\frac{3}{4} * 1 + \frac{1}{3}\frac{3}{4} * 0 = \frac{1}{2}$
(S2,T2)	$\frac{2}{3}\frac{3}{4} * 0 + \frac{1}{3}\frac{3}{4} * 3 = \frac{3}{4}$

Donc J1 doit répondre S2 à la stratégie T2 et il n'a pas de préférence pour répondre à T1.
3e) Sachant que si joueur J2 joue T2 alors le joueur J1 répondra S2, le joueur J2 a interêt à toujours jouer T2 dans un jeu de type A et toujours T1 dans un jeu de type B. Son gain espéré serait alors $\frac{2}{3}$ ce qui est considérablement meilleur que $\frac{1}{3} + \frac{3}{4}$.
3f) Plus généralement on pourra considérer que J2 envoie un signal trompeur avec probabilité p_A dans le jeu A et p_B dans le jeu B, on aurait donc le tableau de probabilités suivants:

	type A	tybe B
T1	$p_A \frac{2}{3}$	$(1-p_B)\frac{1}{3}$
T2	$(1-p_A)\frac{1}{3}$	$p_B \frac{1}{3}$

Si J2 joue T1 alors J1 peut déduire la probabilité du type A:

$$p(A|T1) = \frac{p_A \frac{2}{3}}{p_A \frac{2}{3} + (1-p_B)\frac{1}{3}} = \frac{2p_A}{1+2p_A-p_B}$$

a rediger

Une équilibredans un sens á préciser se trouve à $p_A = 0$ et $p_B = \frac{2}{3}$.