Université de Nice
Ingo Waschkies
2014

L2 MASS
semestre 1

Partiel. Documents et instruments électroniques interdits.

1. Fonctions affines(1+1+3+2+3)

   On note D l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ des points $(-1,0),(1,0),(0,1)$.

   (a) Dessiner D.

   (b) Soit la fonction affine $f(x,y)=x-2y+2$. Trouver le maximum et le minimum dans D de f.

   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a,b,c\in\mathbb{R}$ pour que la fonction affine $f(x,y)=ax+by+c$ prenne son maximum dans D en $(0,1)$. Dans ce cas décrire en fonction des coefficients le sous-ensemble de D sur lequel le maximum est atteint.

   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a,b,c\in\mathbb{R}$ pour que la fonction affine $f(x,y)=ax+by+c$ prenne son maximum dans D en $(0,0)$.

   (e) Soient les fonctions affines $f(x,y)=3x-2y+1$ et $g(x,y)=x+2y-1$. Déterminer $\max_{(x,y)\in D}(\min(f(x,y),g(x,y))$. Préciser dans quels points de D ce max est atteint.

2. Equilibre de Nash d'un jeu à somme nulle (1+1,5+3,5+1+1+5 (ou 2,5 si on choisit l'alternative, non cumulable))

   Soit le jeu à somme nulle

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Justifier qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

   (b) Supposons que le joueur 1 joue la stratégie mixte $(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4})$. Trouver la ou les meilleure(s) réponse(s) en stratégie mixte du joueur 2.

   (c) Présenter graphiquement les meilleures réponses du joueur 1 aux stratégies mixtes du joueur 2 - pour cela il suffit de faire un dessin de la décomposition de Δ_2 (qui représente l'ensemble des stratégies mixtes du joueur 2) en morceaux de sorte que la meilleure réponse en chaque morceau est une réponse pure du joueur 1 que l'on précisera. Dans le dessin on précisera aussi les coordonnées des coins de ces morceaux.

   (d) Déduire qu'il existe une unique stratégie mixte prudente du joueur 2 que l'on précisera.

   (e) Déduire un équilibre de Nash en extension mixte du jeu. Quelle est la valeur du jeu?

   (f) On se propose de déduire toutes les équilibres de Nash

      i. Justifier que si joueur 1 joue une stratégie mixte appartenant à un équilibre de Nash, alors les réponses pures $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ du joueur 2 donnent le même paiement que l'on précisera.

ii. Déduire que les stratégies mixtes du joueur 1 appartenant à un équilibre de Nash se trouvent toutes sur une droite D dont on précisera l'équation.

iii. On suppose que le joueur 1 joue une stratégie mixte de D. Calculer le paiement du joueur 2 quand il joue $(0, 1, 0)$.

iv. Déduire avec justification toutes les équilibres de Nash de ce jeu.

Alternative à (f) Utiliser la méthode usuelle pour chercher les stratégies prudentes du joueur 1 et en déduire toutes les équilibres de Nash.