Contrôle Analyse LMASS2

Mai 2013

(durée : 1 Heure)

I On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \frac{\pi}{7}$, $u_{n+1} = \sin(u_n) = f(u_n)$

a) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

b) Calculer la limite ℓ à priori (Résoudre : $f(\ell) = \ell$)

c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

d) Comparer u_2 et u_1.

e) Soit $f(x) = \sin x$. Déduire du tableau de variation de $f(x)$ sur $[0, 1]$ la monotonie de u_n.

f) Etudier la convergence de (u_n). Conclure.

II Les fonctions suivantes définissent-elles des normes sur $\mathbb{R}^2$: $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f_1(x,y) = 2|x| + |y|$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f_2(x,y) = \frac{|y|}{2}$

III Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \frac{x}{|x| + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Calculer $\lim_{n \to +\infty} f(\frac{1}{n}, 0)$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

IV L'ensemble suivant est-il ouvert ? fermé ? compact ? $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y^2 \geq \frac{1}{2}\}$

VI Trouver les points critiques de

$$f(x,y) = xy\,(6 - x - y)$$