Examen Analyse 21 Avril 2015

durée : 1H

Aucun document autorisé

I Etudier la nature des séries de terme général :

1) $u_n = \dfrac{n^2(n+5)}{2^n}$, $n \geqslant 0$

2) $u_n = \left(\dfrac{2n}{n+1}\right)^n$, $n \geqslant 0$

3) $u_n = \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n$, $n \geqslant 0$. Calculer la valeur de $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ si la série est convergente.

II Calculer $\int_1^x \dfrac{dt}{t \ln t}$ pour $x \geqslant 1$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t \ln t}$

III Nature de $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t^4}\, dt$

IV On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = |x| + 3|y|$.
f est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

V L'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2x^2 + 3y^4 = 1\}$ est-il ouvert, fermé, compact ?

Examen Math 4 - 2015 - session 2

durée 1H

Aucun document autorisé

I Les fonctions suivantes sont-elles des normes sur $\mathbb{R}^2$? :

$$f(x,y) = x + y$$
$$g(x,y) = y^2$$

II Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

1) Calculer la limite de la suite $f(\frac{1}{n}, 0)$

2) Calculer la limite de la suite $f(0, \frac{1}{n})$

3) f est-elle continue en $(0,0)$?

III L'ensemble suivant est-il ouvert, fermé, borné ?

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 < 2 \}$$

IV Donner la nature des séries de terme général :

1) $u_n = \dfrac{n^5+1}{n^6+5}$, $u_n = \dfrac{n}{3^n}$ $(n \geq 0)$

V Donner la nature de l'intégrale :

$$\int_4^{+\infty} e^{-t^6}\, dt$$