**L2 MASS - Probabilités** **Interrogation 2** **2 décembre 2014**

Durée prévue : 1h. Documents et appareils électroniques prohibés

---

**Nom :** **Prénom :**

*Questions en page 1 et 3. Barème approximatif : Ex.1 : 4pts, Ex.2 : 6pts (total sur 10)*

**1.** Sur l'ensemble des étudiants fréquentant le campus Sciences aujourd'hui 33% étudient la biologie, 50% l'informatique et 17% les sciences physiques. (Les étudiants en mathématiques ne vont pas en cours.)

On observe que 70% des étudiants en biologie prennent leur repas au restaurant universitaire (les autres achètent un sandwich) ainsi que 50% des étudiants en informatique et 60% des étudiants en sciences physiques.

**a.** Quelle est la probabilité qu'un étudiant rencontré au hasard sur le campus prennent son repas au restaurant universitaire ?

**b.** On rencontre un étudiant au restaurant universitaire. Est-il plus probable qu'il étudie la biologie plutôt que l'informatique ? Justifiez par un calcul.

**c.** Les évènements "manger au restaurant universitaire" et "étudier en biologie" observés sur le campus sont ils indépendants ? Expliquez.

**1a.** Notons $B, I, P, RU$ les évènements "étudier la biologie", "étudier l'informatique", "étudier les sciences physiques", "prendre son repas au restaurant universitaire". On connaît $\mathrm{P}(B) = 0.33$, $\mathrm{P}(I) = 0.5$, $\mathrm{P}(P) = 0.17$, $\mathrm{P}(RU|B) = 0.7$, $\mathrm{P}(RU|I) = 0.5$, $\mathrm{P}(RU|P) = 0.6$.
On a $\mathrm{P}(RU) = \mathrm{P}(RU|B) \times \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(RU|I) \times \mathrm{P}(I) + \mathrm{P}(RU|P) \times \mathrm{P}(P)$
$= 0.7 \times 0.33 + 0.5 \times 0.5 + 0.6 \times 0.17 = 0.583$ — 1pt

**1b.** On veut comparer $\mathrm{P}(B|RU)$ avec $\mathrm{P}(I|RU)$.
On a $\mathrm{P}(B|RU) = \dfrac{\mathrm{P}(B \text{ et } RU)}{\mathrm{P}(RU)}$ de même $\mathrm{P}(I|RU) = \dfrac{P(I \text{ et } RU)}{\mathrm{P}(RU)}$ ; comme $\mathrm{P}(RU) > 0$ il suffit de comparer $\mathrm{P}(B \text{ et } RU)$ avec $\mathrm{P}(I \text{ et } RU)$.
Le premier vaut $\mathrm{P}(RU|B) \times \mathrm{P}(B) = 0.7 \times 0.33 = 0.231$. Le second vaut $\mathrm{P}(RU|I) \times \mathrm{P}(I) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$. Conclusion : il est plus probable que l'étudiant rencontré étudie l'informatique. — 2pt

**1c.** Les évènements seraient indépendants si on avait $\mathrm{P}(RU|B) = \mathrm{P}(RU)$ (presque indépendants si ces nombres étaient presque égaux). Le premier vaut 0.7, le second vaut 0.583 ; autrement dit apprendre qu'un étudiant rencontré sur le campus étudie la biologie rend $\frac{0.7}{0.583} \approx 1.2$ fois plus probable le fait qu'il prenne son repas au restaurant universitaire. Les évènements ne sont donc pas indépendants. — 1pt

**2.** Une expérience consiste à lancer deux dés à quatre faces, chacune des faces étant numérotée de 1 à 4. On note $X$ la valeur affichée par le premier dé, $Y$ celle affichée par le second dé et on pose $Z = 2X - Y$.

**a.** Donner un modèle $\Omega$ avec probabilité uniforme tel que $Z$ soit une variable aléatoire $\Omega \to \mathbb{R}$.

**b.** Quelles sont les valeurs prises par $Z$ ? Déterminer la loi de $Z$.

**c.** Calculer l'espérance et la variance de $Z$ (plusieurs méthodes sont possibles).

On répète l'expérience $n$ fois et on note $Z_1, \ldots, Z_n$ les valeurs prises par $Z$ à chaque expérience.

**d.** Calculer l'espérance et la variance de la somme $\sum_{i=1}^n Z_i$.

**e.** Vers quoi tend la probabilité de l'évènement $\sum_{i=1}^n Z_i \leq 0$ quand $n$ tend vers l'infini ? Vers quoi tend celle de l'évènement $\sum_{i=1}^n Z_i \geq 0$ ?

**2a.** Les dés étant supposés équilibrés, chacun prend les valeurs $1, 2, 3, 4$ de façon équiprobable. Le lancé du premier dé étant indépendant du lancé du second, le couple de dés prend comme valeurs les couples $(x, y)$ de nombres entre 1 et 4 de façon équiprobable. On peut donc prendre $\Omega = \{1, \ldots, 4\} \times \{1, \ldots, 4\}$ avec proba uniforme et alors $Z$ est la fonction $\Omega \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x - y$.

1pt

**2b.** Voici le tableau des valeurs prises par $Z = 2X - Y$ suivant les valeurs de $X$ et $Y$

| $Y$ / $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | -1 | -2 |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 4 | 7 | 6 | 5 | 4 |

On en déduit que les valeurs prises par $Z$ sont tous les entiers de $-2$ à 7.

De plus, comme la proba est uniforme sur $\Omega = \{1 \ldots 4\} \times \{1 \ldots 4\}$, la probabilité de l'évènement $Z = n$ (pour $n \in \{-2, \ldots, 7\}$) est le nombre de couples $(x, y)$ tels que $2x - y = n$ divisé par le cardinal de $\Omega$. D'après le tableau ci-dessus on obtient le tableau suivant pour la loi de $Z$ :

| $n$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Z = n)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

0.5pt pour les valeurs de $Z$, 1.5pt pour la loi de $Z$ avec justification

**2c.** On a $\mathrm{E}(Z) = 2\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y)$ par linéarité de l'espérance
$= \mathrm{E}(X)$ car $X$ et $Y$ ont même loi donc même espérance.
$= (1 + 2 + 3 + 4) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$

$\mathrm{V}(Z) = \mathrm{V}(2X) + \mathrm{V}(Y)$ car $2X$ et $Y$ sont indépendantes
$= 4\mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$ (la variance est quadratique)
$= 5\mathrm{V}(X)$ car $X$ et $Y$ ont même loi donc même variance.
$= 5(\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2)$

$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{4} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{30}{4}$, $\mathrm{E}(X)^2 = (\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$, d'où $V(Z) = 5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$.

1pt pour l'espérance, 1pt pour la variance (avec explications)

**2d.** On a $\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n Z_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}(Z_i)$ par linéarité de l'espérance,
$= n\mathrm{E}(Z)$ car les $Z_i$ ont même loi que $Z$ donc même espérance,
$= \frac{5}{2} n$

$\mathrm{V}(\sum_{i=1}^n Z_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{V}(Z_i)$ car les $Z_i$ sont indépendants entre eux
$= n\mathrm{V}(Z)$ car les $Z_i$ ont même loi que $Z$ donc même variance
$= \frac{25}{4} n$.

1pt pour l'espérance, 1pt pour la variance, avec explications

**2e.** D'après la Loi des grands nombres, la probabilité que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$ soit distant de $\mathrm{E}(Z)$ d'au moins $\epsilon$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, ceci pour tout $\epsilon > 0$ en particulier pour $\epsilon = \mathrm{E}(Z)$. L'évènement $\sum_{i=1}^n Z_i \leq 0$ implique que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$ est distant de $\mathrm{E}(Z)$ d'au moins $\mathrm{E}(Z)$ donc sa probabilité tend vers 0 quand $n \to \infty$.

On a $\mathrm{P}(\sum_{i=1}^n Z_i > 0) = 1 - \mathrm{P}(\sum_{i=1}^n Z_i \leq 0)$ donc tend vers 1 quand $n \to \infty$, a fortiori $\mathrm{P}(\sum_{i=1}^n Z_i \geq 0) \geq \mathrm{P}(\sum_{i=1}^n Z_i > 0)$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.

1pt pour chacune des limites avec explications, 0 sinon