# Développements limités des fonctions usuelles

Pour toutes ces fonctions, vous dessinerez une représentation graphique des fonctions ci-dessous

## Les fonctions suivantes possèdent des développements limités au voisinage de 0

à l'ordre $n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i + O(x^{n+1})$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} x^i + O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left( \prod_{j=0}^{i-1} (a-j) \right) x^i + O(x^{n+1}), a \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + O(x^{2n+3}) \text{ à l'ordre } 2n+2$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} + O(x^{2n+2}) \text{ à l'ordre } 2n+1$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} + O(x^{2n+1}) \text{ où les } B_n \text{ sont les nombres de Bernoulli}$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \text{ à l'ordre } 2n+1$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \text{ à l'ordre } 2n+2$$

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7) \text{ à l'ordre } 6$$

$$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + O(x^{2n+3}) \text{ à l'ordre } 2n+2$$

$$\mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \cdots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + O(x^{2n+3}) \text{ à l'ordre } 2n+2$$

$$\mathrm{Argsh}(x) = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + O(x^{2n+3}) \text{ à l'ordre } 2n+2$$

$$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}) \text{ à l'ordre } 2n+2$$

$$\mathrm{Argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}) \text{ à l'ordre } 2n+2$$

## Opérations sur les développements limités, *Revoir le cours d'Analyse 1.*

Composition de fonction $g(f(x))$ ; si le DL de $f$ est au voisinage de $x_0$, le DL de $g$ doit être au voisinage de $y_0 = f(x_0)$ ; sinon c'est une erreur courante mais grossière ! De plus les 2 développements doivent être au même ordre. Méthode suggérée :

1. faire un changement de variable pour se ramener en zéro
2. substituer le développement de $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ dans celui de $g(y) = Q_n(y) + o(y^n)$ ; négliger les monômes de degré supérieur à $n$

**Exemple** $f(x) = a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$, $g(x) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + o(x^2)$, alors
$g(f(x) = b_0 + b_1a_1x + (b_1a_2 + b_2a_1^2)x^2 + o(x^2)$ Noter : $a_0 = 0$ !