L2PC-SF Analyse — Corrigé de l'examen de janvier 2014

Dans le corrigé la notation $O_{x \to x_0}(f(x))$ ("grand O de f(x) en x_0") désigne le produit de f(x) par une fonction bornée au voisinage de x_0.

1. $f(x) = e^{3x} - \sin(x) \rightsquigarrow F(x) := \int f(x)\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \cos x + cste$ $\qquad F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^3}{3} + \cos 1 + cste = 0 \Leftrightarrow cste =$

1+1 d'où $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \cos(x) - \frac{4}{3}$

$G(x) = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\int \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\sqrt{4-x^2} + cste$ (on reconnaît $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$)

1+1 $G(1) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} + cste = 0 \Leftrightarrow cste = \sqrt{3}$

2. $\cos(x) = \cos(0) + \cos'(0)\,x + \frac{\cos''(0)}{2}x^2 + o_{x\to 0}(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$

$\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{1+1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \sqrt{2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1\underbrace{-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}_{X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}}$

On sait $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X + o_{X\to 0}(X)$ donc $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right) + \underbrace{o_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)}_{= x^2 o_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}+o(1)\right) = o_{x\to 0}(x^2)}$

d'où $\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$

Autre méthode : on calcule les dérivées première et seconde de $\sqrt{1+\cos x}$ en $x=0$ et on applique la formule de Taylor

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + o(x^2)}{\sin^2 x} = \frac{x^2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}+o(1)\right)}{x^2(1+o(1))}$$ puisque $\sin(x) = x + o_{x\to 0}(x) = x(1+o(1))$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}+o(1)}{1+o(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{8}$$

3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{1-2x+x^2}$ en $x=1$ $\qquad$ on écrit $x = 1+h$ avec $h\to 0$ qd $x\to 1$

$\left.\begin{array}{l} \ln(x) = \ln(1+h) = h + o_{h\to 0}(h) \\ 1-2x+x^2 = (1-x)^2 = h^2 \end{array}\right) \rightsquigarrow f(1+h) = \frac{h+o(h)}{h^2} = \frac{h}{h^2}(1+o(1)) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{h}$

donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$

Autre méthode : formule de Taylor à l'ordre 1 en $x=1$ pour $\ln(x)$

$\int_0^1 f(x)\,dx$ est impropre en 0 et en 1. En 1 on a $f(x) \sim \frac{1}{(x-1)}$ $\qquad \frac{1}{x-1}$ est de signe constant pour $x<1$ voisin de 1

donc $\int_{1/2}^1 f$ est de même nature (en 1) que $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{(x-1)} = \lim_{b\to 1} \left[\ln(1-x)\right]_{1/2}^b = \lim_{h\to 0^+} \ln(h) - \ln(1/2) = -\infty$

Conclusion $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge en 1

* En 0 $\frac{\ln(x)}{1-2x+x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$ de signe constant pour x proche de 0^+. On a $\ln(x) = o_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (car $\sqrt{x}\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$)

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ est de signe constant et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge donc $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ cvge donc $\int_0^{1/4} f$ converge en 0

4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x+x^3}\,dx$ est impropre en 0 et en $+\infty$

En 0 $\displaystyle\frac{\cos(x)}{x+x^3} = \frac{1+o_{x\to 0}(1)}{x(1+x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$ Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x+x^3}\,dx$ diverge en 0

(règle de Riemann). On a répondu à la question.

[En $+\infty$ $\displaystyle\frac{\cos(x)}{x+x^3} = \frac{1}{x^3} \times \frac{\cos x}{1+\frac{1}{x^2}} = O_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$ Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ converge (règle de Riemann) et $\frac{1}{x^3}$ est de signe constant

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x+x^3}\,dx$ converge]

La comparaison série-intégrale ne s'applique pas ici.

On a $\displaystyle\frac{\cos(n)}{n+n^3} = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ d'après l'observation ci-dessus.

$\frac{1}{n^3}$ est de signe constant et $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente d'après la règle de Riemann donc $\sum \frac{\cos(n)}{n+n^3}$ converge d'après les règles de comparaison

5. (E) $xy'+y=(x-1)^2$ sur $]0,+\infty[$ vérifiant $y(1)=0$

On commence par trouver une solution non nulle de l'éq. homogène $xy'+y=0$ sur $]0,+\infty[$

$$xy' = -y \iff \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \iff \ln(|y|)' = -\ln(x)+\text{cste} \iff y = \underbrace{\pm\exp(-\ln(x)+\text{cste})}_{e^{\text{cste}}\times\frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{e^{\text{cste}}}{x}}$$

là où y ne s'annule pas

donc $y(x) = \frac{1}{x}$ est solution (signe $+$ et cte $=0$)

Variation de la constante : on écrit $y(x) = \frac{z(x)}{x}$, ce qui revient à poser $z(x) = x\,y(x)$

alors $y'(x) = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2}$

$xy'+y = z'$

y solution de (E) sur $]0,+\infty[$ $\iff z'=(x-1)^2 \iff z(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + \text{cste} \iff y(x) = \frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{x} + \frac{\text{cste}}{x}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x}\right) + \frac{\text{cste}}{x}$$

$$= \frac{1}{3}x^2 - x + 1 + \left(\text{cste}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x}$$

$y(1)=0 \iff \frac{\text{cste}}{1} = 0 \iff \text{cste}=0$

Si y est sol. sur $\mathbb{R}$ et vérifie $y(0)=2$ alors d'après (E) pour $x=0$ on a $0\times y'(0)+2 = (-1)^2 = 1$ impossible

* La solution trouvée sur $]0,+\infty[$ avec cste $=\frac{1}{3}$ s'écrit $y(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 1$ donc a une expression définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ entier. On a encore $xy'+y=(x-1)^2$ pour tout $x\leq 0$ et par calcul $y(0)=1$

6. (E) $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = y'(1) = 0$

On cherche α tq $y(x) = x^\alpha$ soit solution de (E_0) (sur $]0,+\infty[$)

$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ si $\alpha \neq 0$, $y'(x) = 0$ sinon

$y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ si $\alpha \neq 0,1$ $y''(x) = 0$ sinon

Pour $\alpha \neq 0,1$ $x^2y'' + 3xy' + y = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha} + 3\alpha x^\alpha + x^\alpha = (\alpha^2 + 2\alpha + 1)x^\alpha$ et alors y est sol de $(E_0) \Leftrightarrow \alpha = -1$

$= (\alpha+1)^2 x^\alpha$

(Pour $\alpha = 0$ ou 1 y n'est clairement pas solution)

Variation de la constante : on écrit $y(x) = \frac{z(x)}{x}$ (licite pour $x \neq 0$)

$y'(x) = z'(x)\frac{1}{x} - z(x)\frac{1}{x^2}$, $y'' = z''\times\frac{1}{x} - 2z'\times\frac{1}{x^2} + z \times \frac{2}{x^3}$

$x^2y'' + 3xy' + y = xz'' + z'$

y sol de (E) sur $]0,+\infty[\Leftrightarrow xz'' + z' = \frac{1}{x^2}$ · (F)

On sait avec l'ex. 5 que $z'(x) = \frac{1}{x}$ est solution de $xz'' + z' = 0$

On cherche les z' solution de (F) sous la forme $z'(x) = \frac{\omega(x)}{x}$ (variation de la constante)

alors $xz'' + z' = \omega' = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \omega(x) = \frac{-1}{x} + c$ pour un $c \in \mathbb{R}$

$z'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{c}{x} \Leftrightarrow z(x) = \frac{1}{x} + c\ln(x) + d$ pour un $d \in \mathbb{R}$

Conclusion y est sol. de (E) $\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{x^2} + c\frac{\ln(x)}{x} + \frac{d}{x}$ avec $c, d \in \mathbb{R}$ constantes

$y(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

$y'(1) = 0 \Leftrightarrow -2 + c - d = 0 \Leftrightarrow c = 1$ $\left(y'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{c}{x^2} - c\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{d}{x^2} \right)$