L2 PC-SF - Analyse **Partiel 1** **8 novembre 2013**

Durée prévue : une heure ; documents et matériel électronique interdit

Justifiez correctement chaque calcul.

1. a. Donner (calculer) le développement limité à l'ordre 2 en $x = 2$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.

b. Donner le DL à l'ordre 2 en $x = 0$ de $\cos(x)$ puis de $\sqrt{1+\cos(x)}$.

c. Que vaut

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(x)} - \sqrt{2}}{1 - \cos(x)} \quad ?$$

2. a. L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

est elle convergente ?

b. Qu'en est il de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} \quad ?$$

3. a. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle

$$y' + 4y = 0 \quad ?$$

b. Quelle est la solution de l'équation différentielle

$$y' + 4y = x$$

prenant la valeur 0 en $x = 0$?

1. $\ln(2+h) = \ln\left(2\left(1+\frac{h}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right) = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + o_0(h^2)$

$= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o_0(h^2)$

$\ln(1+\cos x) = \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)\right) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + o_0(x^2)$

$\dfrac{\ln(2) - \ln(1+\cos x)}{1-\cos x} = \dfrac{x^2/4 + o_0(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o_0(x^2)} = \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}$

2 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}} \rightsquigarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ cvge

$\dfrac{1}{\sqrt{x+x^2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \rightsquigarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$ diverge

3 $y(x) = a e^{4x}$

$-\frac{x}{4} - \frac{1}{16}$ sol particulière

1. $\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2} - \frac{1}{8}\frac{h^2}{4} + o_0(h^2)\right)$

$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + o_{x\to 2}\left((x-2)^2\right)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$

$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + o_0(x^2)\right)\right) + o_0(x^2)$

$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + o_0(x^2)$

$\dfrac{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{2}}{1-\cos x} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{8}x^2 + o_0(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o_0(x^2)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{1+o(1)}{1+o(1)}\right) \underset{x\to 0}{\to} -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est C^0 sur $[0,+\infty[$, l'intégrale est impropre en $+\infty$

$x>0$ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ est divergente donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ est divergente

(règle de Riemann)

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}}$ est C^0 sur $]0,+\infty[$, l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$

en 0 $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ converge

en $+\infty$ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ converge de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge

Conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ converge

3a $\dfrac{y'}{y} = -4 \rightsquigarrow \ln(y) = -4x \rightsquigarrow y(x) = e^{-4x}$ solution sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas.

On ~~peut~~ écrit $y(x) = z(x)\,e^{-4x}$ (toujours possible) y solution $\Leftrightarrow z'(x)e^{-4x} = 0$
$\Leftrightarrow z'(x) = 0$
$\Leftrightarrow z(x) = \text{cte}$

donc les sol. sont $y(x) = c\,e^{-4x}$ avec $c \in \mathbb{R}$

3b On cherche y sous la forme $z(x)e^{-4x} \rightsquigarrow z'(x)e^{-4x} = x \Leftrightarrow z(x) = \int x e^{4x}dx$

IPP $\displaystyle\int x e^{4x}dx = \left[x\frac{e^{4x}}{4}\right] - \int \frac{e^{4x}}{4}dx = \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + \text{cste}$ $\rightsquigarrow y(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{16} + ce^{-4x}$

$y(0) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{16}$