**L2 PC-SF - Analyse** **Partiel 2** **20 décembre 2013**

Durée prévue : une heure ; documents et matériel électronique interdits

*Justifiez correctement chaque calcul.*

**1.** Justifier l'inégalité

$$\int_1^n \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ converge t-elle ? (justifier par un calcul). En déduit on la convergence ou la divergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ ?

**2.** Justifier la convergence ou la divergence des séries

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n+n^2}, \quad \sum \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

**3.** L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$ converge t-elle ? (Justifier.)

**4. a.** Trouver un $\alpha$ tel que $y(x) = e^{\alpha x}$ soit solution de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

**b.** Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = 2xe^{-x}$$

vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Corrigé

1 ( 1. $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

car $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ sur $[k, k+1]$

1 ( On connaît $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(1) = \ln(b) \longrightarrow +\infty$ qd $b \to +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ (l'intégrale diverge)

1 ( $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} \longrightarrow +\infty$ qd $N \to +\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty$ qd $N \to +\infty$ : $\sum \frac{1}{n}$ diverge

1 ( 2. $\displaystyle\frac{\sqrt{n}}{n+n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n^2} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$. On sait $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ (règle de Riemann)

1 ( Comme $\frac{1}{n^{3/2}}$ garde un signe constant, la règle de comparaison (équivalent dans les séries) permet de conclure que $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+n^2}$ converge.

(1) ( 2- suite $\ln(1+x) = x + o_{x \to 0}(x)$ (DL en 0 à l'ordre 1) donc $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$

(1) ( $-\frac{1}{n}$ garde un signe constant et $\sum \frac{-1}{n}$ diverge donc $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ diverge

3. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$ est continue sur $]1, +\infty[$, le problème de convergence se pose en 1 et en $+\infty$

En 1 le DL à l'ordre 1 de $\ln(x)$ donne $\ln(x) = \ln(1) + \ln'(1)\times(x-1) + o_{x\to 1}(x-1) = (x-1) + o_{x\to1}(x-1)$
$\underset{x\to1}{\sim} (x-1)$

donc $\dfrac{1}{x(\ln(x))^2} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{1}{1\times(x-1)^2}$

(2)
[On peut détailler : $\dfrac{1}{x(\ln(x))^2} = \dfrac{1}{1+o(1)} \times \dfrac{1}{((x-1)+o(x-1))^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2} \times \underbrace{\dfrac{1}{1+o(1)} \times \dfrac{1}{(1+o(1))^2}}_{\underset{x\to1}{\longrightarrow} 1} = \dfrac{1}{(x-1)^2}\times(1+o(1)) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)^2}$ ]

On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$ diverge en 1 [le chgt de variable $u = x-1$ donne $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^{b-1} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_0^{b-1} = +\infty$ ]

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$ diverge en 1 par les règles de comparaison (règle de Riemann)

<u>Autre méthode</u> : on reconnaît $\dfrac{1}{x(\ln(x))^2} = \dfrac{\ln'(x)}{(\ln(x))^2} = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$ donc $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \left[\frac{-1}{\ln(x)}\right]_a^b = \frac{1}{\ln(a)} - \frac{1}{\ln(b)}$

$\dfrac{1}{\ln(b)} \to 0$ qd $b \to +\infty$ donc l'intégrale impropre est convergente en $+\infty$
$\dfrac{1}{\ln(a)} \to +\infty$ qd $a \to 1^+$ donc l'intégrale impropre est divergente en 1

4a. $y(x) = e^{\alpha x}$ est solution de $y'' + 4y' + 4y = 0$ ssi $\alpha^2 e^{\alpha x} + 4\alpha e^{\alpha x} + 4e^{\alpha x} = 0$
$\Updownarrow$
$\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$ (car $e^{\alpha x}$ ne s'annule pas)
(1)
$\Updownarrow$
$\alpha = -2$

(0,5) ( 4b. On cherche les solutions sous la forme $y(x) = z(x)e^{-2x}$ (variation de la constante)
$y'(x) = z'(x)e^{-2x} - 2z(x)e^{-2x}$ ; $y''(x) = z''(x)e^{-2x} - 4z'(x)e^{-2x} + 4z(x)e^{-2x}$

(1) $y'' + 4y' + 4y = 2xe^{-x} \iff z''e^{-2x} = 2xe^{-x} \iff z'' = 2xe^{x}$

$\iff z'(x) = \displaystyle\int 2xe^x dx + \text{cste} \underset{\text{IPP}}{=} [2xe^x] - \int 2e^x dx + \text{cste} = 2xe^x - 2e^x + c$ pour un $c \in \mathbb{R}$

(1)

(+bonus 1) si $\int 2xe^x dx$ plutôt que $\int 2e^x$

$\iff z(x) = \displaystyle\int (2xe^x - 2e^x + c)\,dx + \text{cste} = \underbrace{2xe^x - 2e^x}_{\text{calcul précédent}} - 2e^x + cx + d$ pour $c, d \in \mathbb{R}$

Puis $y(x) = z(x)e^{-2x} = 2xe^{-x} - 4e^{-x} + cxe^{-2x} + de^{-2x}$

(1)
$y(0) = 1 \iff -4 + d = 1 \iff d = 5$
$y'(0) = 0 \iff 2 + 4 + c - 2d = 0 \iff c = 4$