L2 PC - Analyse	Test	septembre 2013

Durée prévue : une demi heure

Nom : **Prénom :**

1 **1.** Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(\cos(x))$?

1 Calculer la dérivée de f.

2 1 **2.** Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = 1$.

2 **3.** Calculer $\int_0^3 (x-1)(x-2)dx$.

2 **4.** Donner le tableau de variation de la fonction $f(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

1 Quelle est la plus grande valeur prise par f sur l'intervalle $[0, 3]$.

2 **5.** La fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{2} \mapsto 1$$

est elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

1. cos est définie sur $\mathbb{R}$, ln sur $]0,+\infty[$ donc $D_f = \{x \in \mathbb{R}, \cos(x) > 0\}$

sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, cos est >0 ; sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ cos est ≤ 0. Par 2π-périodicité cos est >0 sur les intervalles

$]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$. Donc $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$

Là où f est définie f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et $f'(x) = \cos'(x) \times \ln'(\cos x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

2. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o_0(x^2)$ (DL classique ou bien formule de Taylor)

$\frac{1+x^2}{1+x} = (1+x^2)(1-x+x^2+o_0(x^2)) = 1 - x + x^2 + x^2 + o_0(x^2) = 1 - x + 2x^2 + o_0(x^2)$

Autre méthode : formule de Taylor...

En $x_0 = 1$ on écrit $x = 1+h$

$\frac{1}{1+1+h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{h}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o_{h\to 0}(h\right.$

$1+(1+h)^2 = 1+1+2h+h^2 = 2+2h+h^2$

$f(1+h) = (2+2h+h^2)\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o_0(h^2)\right)$

$= 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} + o_0(h^2) = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}$ o

3. $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ et $\int x^2 - 3x + 2 = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x + cste$ donc $\int_0^3 (x-1)(x-2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3$

$= 9 - \frac{27}{2} + 6 = \frac{3}{2}$

4. $f'(x) = 2 - 3x + x^2 = (x-1)(x-2)$ d'après 3. (ou bien $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2$ ...)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)=5/6$	$\searrow$	$f(2)=\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\sup_{x\in[0,2]} f(x) = f(1) = \frac{5}{6}$ puisque f est d'abord croissante puis décroissante sur $[0,2]$

$\sup_{x\in[2,3]} f(x) = f(3) = \frac{3}{2}$ puisque f est croissante sur $[2,3]$

$\sup_{x\in[0,3]} f(x) = \max\{\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\} = \frac{3}{2}$

5. $f(x) = \frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$. On reconnaît $1 = \sin(\frac{\pi}{2})$ et $\lim_{\substack{x\to\pi/2 \\ x\neq\pi/2}} f(x) = \sin'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \neq 1$ donc

la fonction donnée n'est pas continue en $\pi/2$