L2 PC-SF - Analyse **examen** **16 janvier 2013**

Durée : deux heures ; documents et matériel électronique interdits

Justifiez correctement chaque calcul.

*Les questions marquées de * comptent comme bonus dans le barème.*

1. Pour chacune des fonctions suivantes calculer la primitive définie au voisinage de $x = 1$ et prenant la valeur 0 en $x = 1$:

$$f(x) = e^{3x} - \sin(x) \ , \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

2. Donner le développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$ de $\cos(x)$ puis de $\sqrt{1 + \cos(x)}$.

Que vaut

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos(x)}}{\sin^2(x)} \quad ?$$

3. Donner un équivalent simple de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 - 2x + x^2}$ en $x = 1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge t-elle en $x = 1$?

*Converge t-elle en $x = 0$?

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x + x^3} dx$ converge t-elle ? Qu'en est il de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n + n^3}$?

5. Trouver une fonction y définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, vérifiant $y(1) = 0$ et vérifiant

$$(E) \qquad xy' + y = (x - 1)^2 \quad .$$

Peut on trouver y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y(0) = 2$?

*Peut on trouver y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y(0) = 1$?

6. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$$

avec les conditions initiales $y(1) = y'(1) = 0$.

Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = x^\alpha$ soit solution de l'équation homogène puis, par la méthode de variation de la constante, résoudre (E) avec les conditions initiales données.