Licence L2 PC-SF - Analyse 2 **feuille 2** **23 septembre 2013**

Développements asymptotiques

1. Calculer les limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln(1+\frac{1}{x}), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x\ln(1-x^2)}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^x-x}{1-x-\ln(x)}$$

2. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes

$\frac{\cos x}{x^2}$ en $x=1$, $\frac{x^2+x-2}{1-2x+x^2}$ en $x=1$, $\frac{\ln(x)}{1-2x+x^2}$ en $x=1$, $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ en $+\infty$, $1-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ en $+\infty$

3. Soit a un réel, I un intervalle centré en a, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Observer en utilisant le théorème de Rolle que si la dérivée $f'(x)$ admet une limite l quand $x \to a$, $x \neq a$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Montrer que la fonction $f :]-1,1[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

admet un prolongement continuement dérivable sur $]-1,1[$.

4. Observer $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{1}{\tan x}$. Quelle relation en déduit on entre $\arctan(x)$ et $\arctan(\frac{1}{x})$?

En déduire un développement asymptotique de $\arctan(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Que peut on dire de la limite de $x\cos(\arctan(x))$ en $+\infty$?

5. En partant de $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ et en utilisant la relation de Chasles, montrer $\frac{\ln x}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. Que peut on dire de la limite en $+\infty$ de $\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ avec α, β deux réels > 0 fixés ? (Faire le changement de variable $X = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ et observer $X \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.)

Comment se comparent deux éléments de la famille $\left(\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}\right)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ au voisinage de $+\infty$? Que se passe t-il au voisinage de 0^+ ?

6. Observer que si f, g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, +\infty[$ vérifiant $g \geq 0$ sur $[a, +\infty[$, $\int_a^{+\infty} g$ converge et $f(x) = o_{x\to+\infty} g(x)$ alors $\int_x^{+\infty} f = o_{x\to+\infty}(\int_x^{+\infty} g)$

En écrivant $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ retrouver le développement asymptotique de $\arctan(x)$ en $+\infty$.