Licence L2 PC-SF - Analyse 2 feuille 5 12 novembre 2013

Une Eq. diff. scalaire d'ordre 2 à coefficients non constants

1. Soit l'éqution différentielle

$$(E) \quad x^2y'' - 3xy' + 4y = \log(x) \quad .$$

Trouver un polynôme de degré 2 solution de l'équation homogène puis résoudre (E).

Quelle est la solution prenant la valeur 1 en $x = 1$ et de dérivée nulle en $x = 1$?

Equations différentielles vectorielles à coefficients constants

2. Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} xe^x \\ x \end{pmatrix} \quad .$$

Observer que $Y(x) = y(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, où y est une fonction dérivable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est solution de l'équation homogène (E_0) si et seulement si y est solution de l'eq. diff. scalaire $y' = -y$.

Obtient on ainsi une solution de l'équation avec second membre (E) ?

Observer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle autre solution de (E_0) obtient on ainsi ?

Vérifier que toute fonction $Y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ peut s'écrire $y_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, où y_1, y_2 sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (penser aux systèmes de Cramer). Ecrire de même le second membre $\begin{pmatrix} xe^x \\ x \end{pmatrix}$ comme $b_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour des fonctions b_1, b_2 à déterminer.

Observer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants. Quelles équations différentielles doivent vérifier y_1 et y_2 pour que Y soit solution de (E) ? Quelles sont les solutions de (E) ?

***3.** Résoudre

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \tan(x) \\ -\tan(x) \end{pmatrix} \quad .$$