Licence L2 PC-SF - Analyse 2 **feuille 6** **20 novembre 2013**

Suites et séries numériques

1. Que peut on dire de $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$?

2. Soit α un réel >0 (par exemple $\alpha=1$). On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha}$.

Observer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $S_{2n}<S_{2n+1}$, $S_{2n+1}=S_{2n}+\mathrm{o}(1)$.

En déduire que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) admettent une limite commune S.

Observer $\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}\leq|S-S_n|\leq\frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Ex. On peut montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$ (voir ex. 8). Donner une approximation décimale de $\ln(2)$ à 10^{-1} près.

3. $\alpha>0$ fixé. Montrer que $\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\sim_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$. En déduire que $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha>1$.

4. Observer $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\frac{n}{2n}$. En déduire que $\sum\frac{1}{n}$ diverge. Que peut on dire de $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha\leq1$?

5. Donner un développement asymptotique de $u_n=\ln\big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$ quand $n\to+\infty$ avec un reste en $\mathrm{O}\big(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\big)$.

La série $\sum u_n$ converge t-elle ?

*Vérifie t-elle les hypothèses sur les séries alternées ?

6. $\alpha>0$ fixé. Observer

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\leq\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}\ .$$

Retrouver ainsi la convergence de $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de α.

7. Soit f la fonction donnée par $f(x)=\sqrt{1+x}$. Trouver le ou les x tel que $f(x)=x$.

Soit (u_n) la suite donnée par $u_0\in]-1,+\infty[$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$. ((u_n) est déterminée par le choix de u_0.) Soit $l\in]-1,+\infty[$ tel que $f(l)=l$. Observer que $|u_{n+1}-l|\leq\frac{1}{2}|u_n-l|$. En déduire que $u_n\to l$ quand $n\to+\infty$.

*La suite (u_n) est elle croissante et majorée ? décroissante et minorée ?

***8.** En utilisant le calcul classique de $\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$, montrer que $\ln(2)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}+\mathrm{O}\big(\frac{1}{n}\big)$.

***9.** Reconnaissez dans $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ une somme de Riemann et en déduire la limite quand $n\to\infty$.