

Suites et séries (2)

Critère de Riemann

1. En comparant le terme général de la série avec $\frac{1}{n^\alpha}$ pour α convenable, justifier la convergence ou la divergence des séries suivantes.

Lorsque la série diverge, pouvez vous donner un équivalent simple de la somme partielle S_n quand $n \rightarrow \infty$?
Lorsque la série converge, pouvez vous donner un équivalent simple du reste R_n lorsque $n \rightarrow \infty$?

$$\sum \frac{1}{1+2n+n^2}, \quad \sum \frac{1}{1+3n-n^2}, \quad \sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}, \quad \sum \frac{1}{n+\sqrt{n}+n\sqrt{n}}$$

$$\sum \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}, \quad \sum \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \sum \ln\left(\frac{1+3n+n^2}{n+n^2}\right)$$

2. Comment se compare $\frac{1}{n \ln(n)}$ à $\frac{1}{n^\alpha}$? Peut on en déduire la convergence ou la divergence de $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$?

Séries semi-convergentes

3. Avec un développement asymptotique du terme général, justifier la convergence ou la divergence des séries suivantes.

*Pouvez vous donner la vitesse de convergence (*i.e.* un équivalent simple du reste R_n) ou de divergence (*i.e.* un équivalent simple de la somme partielle S_n) ?

$$\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \quad \sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right), \quad \sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Comparaison séries-intégrales

4. En comparant $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ à $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha}$ justifier la convergence ou la divergence de la série en fonction de α .

*Pouvez vous donner la vitesse de convergence ou de divergence de la série ?

5. La série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ se compare t-elle à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$?

*Calculer $\sum_{n=1}^N \sin(n)$ et en déduire par une "intégration par parties" la convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

*La série $\sum \frac{|\sin(n)|}{n}$ est elle convergente ?