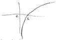
A 1 graphe de $f(x) = \ln(x)$



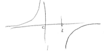
classique

$g(x) = \ln(1 - \frac{2}{x})$ défini si $\left| \begin{array}{l} x \neq 0 \text{ et} \\ 1 - \frac{2}{x} > 0 \end{array} \right.$
$\Updownarrow$
$x < 0$ ou $x > 2$

Limites aux bornes : $\left.\begin{array}{l} \text{en } -\infty : 0^+ \\ \text{en } +\infty : 0^- \\ \text{en } 0^- : +\infty \\ \text{en } 2^+ : -\infty \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} g > 0 \text{ et} \\ \rightsquigarrow \text{asymptote horizontale en } -\infty \text{ et } +\infty \\ x = 0 \text{ asympt. verticale en } 0^- \\ \text{"} \; x = 2 \text{ — "} \; 2^+ \end{array}$

Convexité ? $x \mapsto 1 - \frac{2}{x}$ est convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$
croissante

ln est concave $\rightsquigarrow$ la composée est concave



2a On a $\ln(1+u) = u + o_{u \to 0}(u)$ donc en remplaçant u par $-\frac{2}{x}$ $\ln(1 - \frac{2}{x}) = -\frac{2}{x} + o_{x \to +\infty}(\frac{1}{x}) \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{2}{x}$

b le critère de Riemann s'applique. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge $(\alpha = 1)$ donc $\int_4^{+\infty} f$ diverge

+c $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{x}$, $-\frac{2}{x}$ garde un signe constant au vois. de $+\infty$, $\int_4^{+\infty} -\frac{2}{x} dx$ diverge donc $\int_4^x f(t)\,dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_4^x -\frac{2}{t} dt = -2 [\ln t]_4^x$

$= -2\ln x + 2\ln 4$

$\underset{x \to +\infty}{\sim} -2\ln x$

3a Comme en 2a on remplace u par $-\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}}$ ds l'équivalent $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$

on obtient $\ln(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}}) \underset{n \to \infty}{\sim} -\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\left(2 - \frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 2} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$

le critère de Riemann s'applique : on a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge donc $\sum \ln(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}})$ diverge

+b Comme $\frac{2}{\sqrt{n}}$ garde un signe constant au vois. de $+\infty$, les vitesses de divergences sont les m̂

on obtient $\sum_{n=1}^{N} \ln(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}}) \underset{N \to \infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\sqrt{n}}$ (on peut vérifier que $\ln(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}})$ est bien défini dès que $n \geq 1$ mais ce n'est pas ce qui importe ici)

en observant $\frac{2}{\sqrt{n}} \underset{n \to \infty}{\sim} 4\sqrt{n+1} - 4\sqrt{n}$ et $\sum_{n=1}^{N} 4\sqrt{n+1} - 4\sqrt{n} \underset{N \to \infty}{\sim} 4\sqrt{N+1}$ (série télescopique)

$\sim 4\sqrt{N}$

ou bien par comparaison série-intégrale on obtient $\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\sqrt{n}} \underset{N \to \infty}{\sim} 4\sqrt{N}$ puis $\sum_{n=1}^{N} \ln(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}}) \underset{N \to \infty}{\sim} 4\sqrt{N}$

4 (E) $x^2y' - y = 2$ sur $]0, +\infty[$

a (E_0) $x^2y' - y = 0$ qui se réécrit $x^2y' = y$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} \quad (\text{là où } y \neq 0)$$

$$\ln|y| = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + cst$$

$y_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ est solution

b on pose $y(x) = z(x) \cdot y_0(x)$ $\rightsquigarrow y' = z'y_0 + zy_0'$

en reportant ds (E) $x^2z'y_0 + \underbrace{x^2zy_0' - zy_0}_{=0 \text{ car } y_0 \text{ sol. de } (E_0)} = 2$

donc y est sol. de (E) ssi z vérifie $x^2z'y_0 = 2$

$\Updownarrow$

$z' = \frac{2}{x^2} e^{+1/x}$ (sur $]0, +\infty[$ $x \neq 0$)

$\Updownarrow$

c

$z = -2e^{+1/x} + c$ (on a reconnu $u' \exp'(u)$) avec c constante réelle

$\Updownarrow$

$y = (-2e^{1/x} + c)e^{-1/x} = -2 + ce^{-1/x}$, $c \in \mathbb{R}$

Rq on pouvait voir d'emblée que $y = -2$ est sol. de (E) puis $Sol(E) = -2 + Sol(E_0)$

$y(1) = 0 \iff -2 + ce^{-1} = 0 \iff c = 2e$

d Sur $]-\infty, 0[$ les sol. de (E) sont égal^t de la forme $-2 + c\,e^{-1/x}$. une telle solution n'admet un prolong^t dérivable en 0 que si $c = 0$ $\left(e^{-1/x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} +\infty\right)$

donc $y(x) = -2$ est la seule sol. définie sur $\mathbb{R}$ entier

5 (E) $4y'' + 4y' + y = 2xe^{-\frac{1}{2}x}$

a (E_0) $4y'' + 4y' + y = 0$

$e^{\alpha x}$ est sol. ssi $4\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$

$\Updownarrow$

$(2\alpha + 1)^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\alpha = -\frac{1}{2}$

Comme la racine est double les sol. de (E_0) sont les fonctions $P(x)e^{-\frac{1}{2}x}$ avec P polynôme de degré ≤ 1

$P(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

b Il existe une sol. particulière de (E) de la forme $Q(x)e^{-\frac{1}{2}x}$ avec Q poly. de deg $\deg(x) + \text{mult}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$

On cherche donc a, b, c, d tq $y(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-\frac{1}{2}x}$ soit sol. de (E) (on peut imposer $c = d = 0$ puisque toute fonction $(cx + d)e^{-1/2x}$ est sol de (E_0))

En remplaçant ds (E) et en identifiant les coeff. des termes $x^k e^{-\frac{x}{2}}$ on obtient $y_p(x) = \frac{x^3}{12}e^{-x/2}$ sol. part. de (E) puis les sol de (E) sont $\frac{x^3}{12}e^{-x/2} + cxe^{-x/2} + de^{-x/2}$

5c d'après a $y_0(x)=e^{-x/2}$ est sol. de (E_0)

on pose $y(x)=z(x)y_0(x)$

$y' = z'y_0 + zy_0'$

$y'' = z''y_0 + 2z'y_0' + zy_0''$

$4y''+4y'+y = 4z''y_0 + z'(8y_0'+4y_0) + \underbrace{z(4y_0''+4y_0'+y_0)}_{=0 \text{ car } y_0 \text{ sol de } (E_0)}$

y sol de (E) $\iff 4z''e^{-x/2} + z'\left(-4e^{-x/2}+4e^{-x/2}\right) = 2x\,e^{-x/2}$

$\iff 4z''=2x$

$\iff z'=\frac{x^2}{4}+c$ avec $c\in\mathbb{R}$

$\iff z=\frac{x^3}{12}+cx+d$ avec $c,d\in\mathbb{R}$

d Les sol. de (E) sont $y_0(x)z(x)=\left(\frac{x^3}{12}+cx+d\right)e^{-x/2}$

$y(0)=1 \iff d=1$

$y'(x)=\left(\frac{x^2}{4}+c\right)e^{-x/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{12}+cx+d\right)e^{-x/2}$

$y'(0)=0 \iff c-\frac{d}{2}=0$

$\rightsquigarrow z(x)=\left(\frac{x^3}{12}+\frac{x}{2}+1\right)e^{-x/2}$

+6 (E) $4u_{n+2}+4u_{n+1}+u_n=n$

a $P(n)=an+b$ $\quad u_n=P(n)$ $\quad \forall n$ $\quad \rightsquigarrow u_{n+1}=a(n+1)+b=an+a+b$

$u_{n+2}=a(n+2)+b=an+2a+b$

(u_n) sol de $(E) \iff 4an+8a+4b+4an+4a+4b+an+b=n$

$\iff \forall n,\ 9an+(12a+9b)=n$

$\iff 9a=1$ et $12a+9b=0$

$\iff a=\frac{1}{9}$ et $b=-\frac{4}{27}$

b $u_n=(\lambda n+\mu)a^n$ alors $u_{n+1}=(\lambda n+\lambda+\mu)a^{n+1}=(a\lambda n+a\lambda+a\mu)a^n$

$u_{n+2}=(\lambda n+2\lambda+\mu)a^{n+2}=(a^2\lambda n+2a^2\lambda+a^2\mu)a^n$

(u_n) sol de (E_0) $\iff$ $\forall n$ $\quad (4a^2\lambda+4a\lambda+\lambda)na^n+\left(8a^2\lambda+4a^2\mu+4a\lambda+4a\mu+\mu\right)a^n=0$

$a=0$ sol. triviale $(u_n\equiv 0)$

si $a\neq 0$ alors $4a^2\lambda+4a\lambda+\lambda=0$ et $8a^2\lambda+4a^2\mu+4a\lambda+4a\mu+\mu=0$

$\lambda=\mu=0$ sol. triviale $(u_n=0)$ $\quad$ si $\lambda\neq 0$ alors $4a^2+4a+1=0$ donc $a=-\frac{1}{2}$

si $\lambda=0,\mu\neq 0$ à nouveau $4a^2+4a+1=0$ donc $a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$ la cond. devient $(8a^2+4a)\lambda=0$ $\quad 0=0$ pas de cond sur λ

Concl. (u_n) sol. de (E_0) $\Leftrightarrow$ $a = -\frac{1}{2}$, λ, μ quelconque

ou $\lambda = \mu = 0$ et a qcq $(u_n = 0)$

c

$$Sol.(E) = \left\{ \left(\frac{n}{9} - \frac{4}{27} + (\lambda n + \mu)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)_n , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$u_0 = 1 \Leftrightarrow -\frac{4}{27} + \mu = 1 \Leftrightarrow \mu = \frac{31}{27}$

$u_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} - \frac{4}{27} - \frac{1}{2}(\lambda + \mu) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda + \mu = -\frac{2}{27}$

$\rightsquigarrow u_n = \frac{n}{9} - \frac{4}{27} + \left(-\frac{11}{9} n + \frac{31}{27}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$