f2 ex 1 * $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x\ln(1-x^2)}$ forme indéterminée $\frac{0}{0}$

On a $\begin{cases} \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o_{x\to0}(x^3) \\ \ln(1+u) = u + o_{u\to0}(u) \text{ donc } \ln(1-x^2) = -x^2 + o_{x^2\to0}(x^2) = -x^2 + o_{x\to0}(x^2) \end{cases}$

Donc $\dfrac{\sin(x)-x}{x\ln(1-x^2)} = \dfrac{-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)}{-x^3+o_0(x^3)} = \dfrac{x^3}{x^3}\times\dfrac{-1/6+o(1)}{-1+o(1)} \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac16$

* $\ln(1+\frac1x) = \frac1x + o_{1/x\to0}(1/x) = \frac1x + o_{x\to+\infty}(\frac1x)$ d'après le DL_1 en $u=0$ de $\ln(1+u)$

donc $x - x^2\ln(1+\frac1x) = x - \dfrac{x^2}{x} + o_\infty(\dfrac{x^2}{x}) = o_{x\to\infty}(x)$ Insuffisant

$\ln(1+\frac1x) = \dfrac1x - \dfrac1{2x^2} + o_{x\to+\infty}(\dfrac1{x^2})$ d'après le DL_2 en $u=0$ de $\ln(1+u)$

donc $x - x^2\ln(1+\frac1x) = x - \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{x^2}{2x^2} + x^2 o_{+\infty}(\dfrac1{x^2}) = \dfrac12 + o_{+\infty}(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac12$

* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{1-x-\ln(x)} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\exp((1+t)\ln(1+t))-(1+t)}{1-(1+t)-\ln(1+t)}$ en écrivant $\begin{cases} x^x = \exp(x\ln(x)) \\ x = 1+t \text{ de sorte que } x\to1 \text{ si } t\to0 \end{cases}$

$\ln(1+t) = t + o_0(t)$ donc $1-(1+t)-\ln(1+t) = -2t + o_0(t)$

$(1+t)\ln(1+t) = (1+t)(t+o(t)) = t + o(t)$

$\exp((1+t)\ln(1+t)) = \exp(t+o(t)) = 1 + t + o(t) + o(t+o(t)) = 1+t+o(t)$ d'après le DL_1 en 0 de $\exp(u)$

$\dfrac{\exp((1+t)\ln(1+t))-(1+t)}{1-(1+t)-\ln(1+t)} = \dfrac{o(t)}{-2t+o(t)} = \dfrac{o(1)}{-2+o(1)} \xrightarrow[t\to0]{} 0$

f2 ex 2 * $\dfrac{\ln(x)}{1-2x+x^2}$ en $x=1$. On écrit $x=1+t$ $\dfrac{\ln(x)}{1-2x+x^2} = \dfrac{\ln(1+t)}{t^2} = \dfrac{t+o_{t\to0}(t)}{t^2} = \dfrac1t(1+o_{t\to0}(1)) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac1t = \dfrac1{x-1}$

donc $\dfrac{\ln(x)}{1-2x+x^2} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac1{x-1}$

* $1 - \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = 1 - \dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac1{x^2})}}{x(1+\frac1x)} = 1 - \dfrac{x}{x}\times\dfrac{\sqrt{1+\frac1{x^2}}}{1+1/x}$ ($\sqrt{x^2}=x$ pour $x\geq0$)

On a $(1+u)^\alpha = 1+\alpha u + o_{u\to0}(u)$ donc $\sqrt{1+\frac1{x^2}} = 1 + \dfrac1{2x^2} + o_{+\infty}(\dfrac1{x^2})$

$\dfrac1{1+1/x} = 1 - \dfrac1x + o_{+\infty}(\dfrac1x)$

$\dfrac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x} = \left(1+\dfrac1{2x^2}+o(\dfrac1{x^2})\right)\left(1-1/x+o(1/x)\right) = 1 + \dfrac1{2x^2} + o(1/x^2) - 1/x + o(1/x) \underbrace{- \dfrac1{2x^3}+\dots}_{o(1/x)} = 1 - 1/x + o(1/x)$

donc $1 - \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = 1-\left(1-\dfrac1x+o(\dfrac1x)\right) = \dfrac1x + o(1/x) \underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac1x$

f2 ex4 $\tan(\frac\pi2 - x) = \dfrac{\sin(\pi/2-x)}{\cos(\pi/2-x)} = \dfrac{\cos x}{\sin(x)} = \dfrac1{\tan(x)}$ donc $\frac\pi2 - x = \arctan(\dfrac1{\tan x})$ pourvu que $\frac\pi2 - x \in]-\frac\pi2,\frac\pi2[$ c'est-à-dire $x\in]0,\pi[$

Pour $y\geq0$, en posant $x=\arctan(y)$ on obtient $\frac\pi2 - \arctan y = \arctan(\dfrac1y)$ ou encore $\arctan(y)+\arctan(1/y) = \dfrac\pi2$

Pour $y<0$ on a $\arctan(y) = -\arctan(-y)$ (arctan est une fonction impaire)

$\arctan(1/y) = -\arctan\left(-\frac{1}{y}\right)$

$\arctan(-y) + \arctan\left(\frac{1}{-y}\right) = \frac{\pi}{2}$ d'après ce qui précède donc $\arctan(y) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\pi}{2}$

On a $\begin{cases} \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ \arctan(0) = 0 \end{cases}$ donc $\arctan(x) = x + o_{x\to 0}(x)$ donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$

On obtient $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \geq 0$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$

$x\cos(\arctan(x)) = x\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\sin\left(1/x - o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(\frac{1}{x} - o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x} - o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$ d'après le DL_1 de $\sin(u)$ en $u=0$

$= x\left(\frac{1}{x} + o(1/x)\right) = 1 + o(1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

f2bis ex1-a. * $o_{x\to 0}(1)$ désigne une fonction φ de x qui tend vers 0 quand $x\to 0$

$o_{x\to 0}(f(x))$ désigne $f(x) \times o_{x\to 0}(1)$

donc $o_{x\to 0}(o_{x\to 0}(1)) = o_{x\to 0}(1) \times o_{x\to 0}(1)$ est le produit de deux fonctions qui tendent vers 0 en 0, c'est donc une fonction qui tend vers 0 en 0 et ce n'est guère plus.

* $o_{x\to 0}(o_{x\to 0}(x)) = o_{x\to 0}(x) \times o_{x\to 0}(1) = x \times o_{x\to 0}(1) \times o_{x\to 0}(1) = x \times o_{x\to 0}(1) = o_{x\to 0}(x)$

-b $f = o_0(1)$, $g = o_0(1)$ alors $f(g(x)) = o_{x\to 0}(1)$ par composition des limites.

f2bis-ex2 vitesse de convergence de

$$\frac{\sin(x)-x}{x\ln(1-x^2)} = \frac{-x^3/6 + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x\left(-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)} = \frac{x^3}{x^3} \times \frac{-1/6 + \frac{x^2}{120} + o(x^2)}{-1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$= \left(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + o(x^2)\right) \times (-1) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$ d'après le DL_1 de $\frac{1}{1+u}$ en $u=0$

$= +\frac{1}{6} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^2}{120} + o(x^2) = \frac{1}{6} - \frac{11}{120}x^2 + o(x^2)$

donc $\frac{\sin(x)-x}{x\ln(1-x^2)} - \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)-t}{t\ln(1-t^2)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{11}{120}x^2$

f2bis ex3 $f(x) = 2x + o_0(x)$, $g(x) = \ln(x) + 3 + o_0(1)$ alors $f(x)+g(x) = 2x + o(x) + \ln(x) + 3 + o(1) = \ln(x) + 3 + o(1)$ car $2x + o(x) = o(1)$

$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) + 3 + o(1) = -\infty$

* $f(x)\times g(x) = (2x + o(x))(\ln(x) + 3 + o(1)) = 2x\ln(x) + 6x + o(x) + o(x)\ln(x) = 2x\ln(x) + o(x\ln x)$ car $6x + o_0(x) = o_0(x\ln x)$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x) + o(x\ln(x)) = 0$

f2bis ex4 $\quad \dfrac{3+\ln(x)}{2+x\ln(x)} = \dfrac{\ln(x)+3}{x\ln(x)} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x\ln(x)}} = \dfrac{1}{x\ln(x)} \times (\ln(x)+3) \times \left(1 - \dfrac{2}{x\ln(x)} + \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x\ln(x)}\right)\right)$ d'après le DL_1 de $\dfrac{1}{1+u}$ en $u=0$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x\ln(x)}\right)\left(1 - \frac{2}{x\ln(x)} + o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2\ln x} + \frac{3}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x^2\ln(x)}\right) - \frac{6}{x^2\ln(x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2\ln(x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{3}{x\ln(x)} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)$$

f2bis ex5 * $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+1/t^2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$.

$\dfrac{1}{t} \geq 0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc $\displaystyle\int_1^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \underbrace{\int_1^x \frac{dt}{t}}_{=\ln(x)}$ d'après le théorème sur les équivalents dans les intégrales impropres

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \ln(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(\ln(x)) = \ln(x) + o(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$$

car tout nombre est un $\underset{+\infty}{o}(\ln(x))$

* $\dfrac{1}{t+\sqrt{t}+t\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{3/2}} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge (vers $\left[\dfrac{-2}{\sqrt{t}}\right]_1^{+\infty} = 2$) et $\dfrac{1}{t^{3/2}} \geq 0$ au vois. de $+\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t}+t\sqrt{t}}$ converge

mais la valeur de la limite diffère de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$: $\dfrac{1}{t+\sqrt{t}+t\sqrt{t}} < \dfrac{1}{t^{3/2}}$ pour tout $t>0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t}+t\sqrt{t}} < \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$

On n'obtient pas un équivalent de $\displaystyle\int_1^{x} \frac{dt}{t+\sqrt{t}+t\sqrt{t}}$ (un tel équivalent est donné par la limite)

le théorème sur les équivalents dans les intégrales impropres donne la vitesse de convergence :

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t}+t\sqrt{t}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_x^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

f3 ex2 $\quad x^{1/2}\ln(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ donc $|x^{1/2}\ln(x)| \leq 1$ pour x suffisamment proche de 0 donc $|\ln(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour x proche de 0

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ est absolument convergente.

On sait trouver une primitive de $\ln(x)$ par intégration par parties : $\displaystyle\int \ln(x)dx = [x\ln x] - \int \frac{x}{x}dx = x\ln x - x + \text{cste}$

$$\int_0^1 \ln(x)dx = [x\ln x - x]_0^1 = -1$$

$\ln(x^2+x) = \ln(x(1+x)) = \ln(x) + \ln(1+x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x)$ et $\ln(x)$ garde un signe constant au voisinage de 0 donc la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ entraîne celle de $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+x)dx$

β3 ex3 $\ast \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ est impropre en $+\infty$. $\dfrac{x^2}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,dx$ diverge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ diverge

et $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^x 1\,dt = x$

$\ast \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\ln(x)}\,dx$ est faussement impropre en 0 : $\dfrac{x}{\ln(x)}$ admet une limite finie en $x=0$

impropre en ~~x~~ 1 : le dénominateur s'annule

impropre en $+\infty$

en 1 $\ln(x) \sim x-1$ donc $\dfrac{x}{\ln(x)} \sim \dfrac{1}{x-1}$ or $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x-1}$ diverge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\ln(x)}\,dx$ diverge en 1

en $+\infty$ $\dfrac{x}{\ln(x)} \longrightarrow +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\ln x}\,dx$ diverge (grossièrement) en $+\infty$

$\ast \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ est impropre en 0 et en $+\infty$

en 0 $\left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 1$ et $\displaystyle\int_0^1 1\,dx$ converge (c'est une intégrale propre) donc $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ est [absolument] convergente

la vitesse de convergence est majorée par $\displaystyle\int_0^x dt = x$ ~~mais~~ ; on n'a pas d'équivalent.

en $+\infty$ $\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \sim \dfrac{1}{x^2}$ d'après le DL_1 de $\sin(u)$ en $u=0$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ converge, à la vitesse $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}$

β3 ex4 $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha} \times \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha} \times \left(1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ d'après le DL_1 de $\dfrac{1}{1+x}$ en $x=0$

$$= \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

donc $\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} = \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \sim \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$ car $\alpha \neq 0$

Comme $\dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$ garde un signe constant quand $n\to+\infty$, on a que $\sum\left(\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$ et $\sum \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$ sont de même nature.

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{(N+1)^\alpha} = 1 - \frac{1}{(N+1)^\alpha} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$ si $\alpha > 0$; diverge si $\alpha < 0$

On en déduit $\sum \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$ converge si $\alpha > 0$, diverge si $\alpha < 0$. Donc $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha < 1$

β3 ex6 $\ast \dfrac{1}{1+3n-n^2} = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{1}{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} - 1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^2}$ Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \dfrac{1}{1+3n-n^2}$ converge d'après le critère de Riemann, à la même vitesse que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ laquelle converge à la même vitesse que $\sum\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ d'après l'ex 4

Or $\displaystyle\sum_{k\geq n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}$, donc $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge à la vitesse $\dfrac{1}{n}$

$\ast \sin\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ d'après le DL_1 de $\sin(x)$ en $x=0$ et le fait que $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} \to 0$ qd $n\to\infty$

$$= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$\sum \dfrac{1}{n}$ diverge d'après le critère de Riemann, à la vitesse $\ln(n)$ car $\dfrac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) = \ln(n+1) \sim \ln(n)$