f6 ex2 $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\underbrace{-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{n^{3/2}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -2}\Big) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-2}{\sqrt{n}} = \frac{-2}{n^{1/2}}$

D'après le critère de Riemann, comme $\frac{1}{2} \leq 1$, $\sum u_n$ diverge

f6 ex3 $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\ln(x)}$ est continue sur $]0,1[$; l'expression n'est pas définie pour $x=0$ ni pour $x=1$ donc $\int_0^1 f$ est impropre en 0 et en 1.

En 0 : $\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ donc $\int_0^1 f$ converge en 0

(On dit que l'intégrale est faussement impropre en 0)

En 1 $\ln(x) = \ln(1+(x-1)) = \ln 1 + (x-1)\ln'(1) + o_{x\to 1}(x-1) = (x-1) + o_{x\to 1}(x-1)$

$$\frac{(1-x)^{1/2}}{\ln(x)} = \frac{(1-x)^{1/2}}{(x-1)(1+o_1(1))} = -(1-x)^{1/2} \times (1-x)^{-1} \times \underbrace{\frac{1}{1+o_1(1)}}_{\xrightarrow[x\to 1]{} 1} \underset{x\to 1}{\sim} -(1-x)^{-1/2}$$

D'après le ~~cri~~ critère de Riemann $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge en 1 car $-\frac{1}{2} > -1$

Conclusion $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\ln x}\,dx$ converge en 0 et en 1 donc converge

f6 ex8 (E) $u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = n$

On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $u_n = an^2 + bn + c$ soit solution de (E). On a alors $u_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$
$= an^2 + (2a+b)n + a + b + c$

et $u_{n+2} = u_{(n+1)+1} = a(n+1)^2 + (2a+b)(n+1) + a + b + c = an^2 + (4a+b)n + 4a + 2b + c$

En reportant dans (E) on obtient $an^2 + (4a+b)n + 4a + 2b + c + 2an^2 + 2(2a+b)n + 2a + 2b + 2c - 3an^2 - 3bn - 3c = n$

en ~~simp~~ regroupant les termes en n^2 puis en n : $8an + 6a + 4b = n$

ceci doit être vrai pour tout n donc par identification $8a = 1$ et $6a + 4b = 0$

$a = \frac{1}{8}$ puis $b = -\frac{3}{16}$, c quelconque

en particulier, avec $c = 0$, $u_n = \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n$ est solution de (E)

$u_n = a^n$ est solution de (E_0) : $u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$ si $a^{n+2} + 2a^{n+1} - 3a^n = 0$ donc si $a^n(a^2 + 2a - 3) = 0$

$a = 0$ est bien sûr solution. Les autres a ~~ext~~ qui conviennent sont les a vérifiant $a^2 + 2a - 3 = 0$ donc $a = 1$ ou $a = -3$

La somme d'une solution de (E) avec un multiple d' une solution de (E_0) est encore solution de (E) : $u_n = \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n + \lambda 1^n + \mu(-3)^n$

est solution de (E) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (et toute solution de (E) est de cette forme d'après la forme générale des solutions de (E_0) [cours]). On a $u_0 = 1$ si $\lambda 1^0 + \mu(-3)^0 = \lambda + \mu$ vaut 1 donc si ~~μ~~ $\lambda = 1 - \mu$

$u_1 = 0$ si $\underbrace{\frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \lambda - 3\mu}_{+\frac{15}{16} - 4\mu} = 0$ donc si $\mu = \frac{15}{64}$ $\lambda = 1 - \mu = \frac{49}{64}$

Conclusion : la solution cherchée est $u_n = \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n + \frac{49}{64} + \frac{15}{64}(-3)^n$

f6 ex1 Primitive de $k(x) = x^2\sin(x) - 3x e^{-x}\sin(x)$

On cherche séparément $\int x^2\sin(x)\,dx$ et $\int x e^{-x}\sin(x)\,dx$

La 1ère avec deux IPP successives : $\int x^2\sin(x)\,dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + cste$$

d'où $\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + cste$

~~Deux~~ $\int x e^{-x}\sin(x)\,dx$: on met $e^{-x}\sin(x)$ sous forme exponentielle : $e^{-x}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)/_{2i} = \frac{1}{2i}e^{(-1+i)x} - \frac{1}{2i}e^{(-1-i)x}$

puis IPP $\int x e^{-(1+i)x}\,dx = \frac{-1}{1+i}x e^{-(1+i)x} - \int \frac{-1}{1+i}e^{-(1+i)x}\,dx = \frac{-1}{1+i}x e^{-(1+i)x} - \frac{1}{(1+i)^2}e^{-(1+i)x} + cste$

de m̂ $\int x e^{(-1+i)x}\,dx = \frac{-1}{1-i}x e^{(-1+i)x} - \frac{1}{(1-i)^2}e^{(-1+i)x} + cste$

Enfin $\int x e^{-x}\sin(x)\,dx = \frac{1}{2i}\int x e^{(-1+i)x}\,dx - \frac{1}{2i}\int x e^{-(1+i)x}\,dx = \frac{-1}{2i(1-i)}x e^{(-1+i)x} - \frac{1}{2i(1-i)^2}e^{(-1+i)x} + \frac{1}{2i(1+i)}x e^{-(1+i)x}$

$+ \frac{1}{2i(1+i)^2}e^{-(1+i)x} + cste$

On a $\frac{-1}{2i(1-i)} = \frac{-1}{2i+2} = \frac{-(2-2i)}{(2i+2)(-2i+2)} = \frac{-2+2i}{4+4} = \frac{-1}{4} + \frac{i}{4}$

$e^{(-1+i)x} = e^{-x}e^{ix} = e^{-x}\cos x + i e^{-x}\sin x$

$-\frac{1}{2i(1-i)}e^{(-1+i)x} = \left(\frac{-1}{4} + \frac{i}{4}\right)e^{-x}(\cos x + i\sin x) = \frac{e^{-x}}{4}\left(-\cos x - \sin x + i(\cos x - \sin x)\right) = -\frac{e^{-x}}{4}(\cos x + \sin x) + i\frac{e^{-x}}{4}(\cos x - \sin x)$

de même $\frac{-1}{2i(1-i)^2}e^{(-1+i)x} = \frac{-1}{2i(1-2i-1)}e^{(-1+i)x} = \frac{-1}{4}e^{-x}\cos x + i\frac{-1}{4}e^{-x}\sin x$

etc. On obtient $\int x e^{-x}\sin(x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(x\sin x + x\cos x + \cos x) + cste$

Autre rédaction : $\sin(x) = Im\left(e^{ix}\right)$ ("partie imaginaire de e^{ix}")

$x e^{-x}\sin(x) = Im\left(x e^{-x}e^{ix}\right) = Im\left(x e^{(-1+i)x}\right)$

$\int x e^{-x}\sin(x)\,dx = Im\left(\int x e^{(-1+i)x}\,dx\right)$

IPP $\int x e^{(-1+i)x}\,dx = \frac{+1}{-1+i}x e^{(-1+i)x} - \int \frac{+1}{-1+i}e^{(-1+i)x}\,dx = \frac{-1}{1-i}x e^{(-1+i)x} + \frac{1}{(-1+i)^2}e^{(-1+i)x} + cste$

$= -\frac{1+i}{2}x e^{-x}(\cos x + i\sin x) - \frac{i}{2}e^{-x}(\cos x + i\sin x) + cste$ dont on ne retient que la partie imaginaire

$Im\left(\int x e^{(-1+i)x}\,dx\right) = -x e^{-x}\left(\frac{\sin x}{2} + \frac{\cos x}{2}\right) - e^{-x}\left(\frac{1}{2}\cos x\right) + cste$

$\int k(x)\,dx = \int x^2\sin x\,dx - 3\int x e^{-x}\sin(x)\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + \frac{3}{2}x e^{-x}(\cos x + \sin x) + \frac{3}{2}e^{-x}\cos x + cste$