L2 PC-SF - Analyse **examen - sujet A** **19 décembre 2014**

Durée : deux heures ; documents et matériel électronique interdits

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les questions marquées **+** *compte dans le barème pour les groupes P et SF, sont en bonus pour les autres.*

Justifiez correctement chaque calcul.

1. Donner l'allure du graphe de la fonction $f(x) = \ln(x)$ puis de $g(x) = \ln(1 - \frac{2}{x})$ (sur deux dessins séparés) en faisant apparaître sur le graphe le domaine de définition. Expliquez comment vous obtenez l'allure que vous dessinez.

2. a. Donner (en détaillant les calculs) un équivalent simple de la fonction $f(x) = \ln(1 - \frac{2}{x})$ au voisinage de $+\infty$.

b. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ converge t-elle ?

+c. Quelle est sa vitesse de convergence ou de divergence ?

3. a. La série $\sum \ln\big(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}} + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\big)$ converge t-elle ? (expliquez)

+b. Quelle est sa vitesse de convergence ou de divergence ?

4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2y' - y = 2$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$

a. Trouver $y_0(x)$ solution non nulle de l'équation homogène (E_0).

b. On pose $y(x) = z(x)y_0(x)$. Quelle équation doit vérifier la fonction $z(x)$ pour que $y(x)$ soit solution de (E) ?

c. Trouver la solution de (E) prenant la valeur 0 en $x = 1$.

+d. Quelles sont les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ entier ?

5. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad 4y'' + 4y' + y = 2xe^{-\frac{1}{2}x}$$

a. Quelles sont les solutions de l'équation homogène (E_0) ?

b. Quelle prédiction donne le cours sur les solutions de (E) ?

c. Soit α telle que $y_0(x) = e^{\alpha x}$ soit solution de (E_0). (Vous pouvez remplacer α par sa valeur.) En posant $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$ trouver l'équation que doit vérifier la fonction z pour que y soit solution de (E) puis trouver toutes les fonctions z solutions.

d. Quelle est la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$?

+6. On considère la relation de récurrence

$$(E) \qquad 4u_{n+2} + 4u_{n+1} + u_n = n$$

a. Trouver un polynôme P de degré 1 tel que $u_n = P(n)$ soit solution de (E).

b. A quelle condition sur les nombres λ, μ, a a t-on $u_n = (\lambda n + \mu)a^n$ solution de l'équation homogène (E_0) ?

c. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence (E). Donner une expression de u_n en fonction de n.