Licence L2 PC-SF - Analyse 2 feuille 2-bis 7 octobre 2014

Compréhension du cours

1. Dans cet exercice f, g sont des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de 0.

a. On suppose $f(x) = o_{x \to 0}\big(o_{x \to 0}(1)\big)$. Que peut on dire de f au voisinage de 0 ?

Même question si on suppose $f(x) = o_0\big(o_0(x)\big)$

b. On suppose $f = o_0(1)$ et $g = o_0(1)$. Que peut on dire de $f(g(x))$ au voisinage de 0 ?

c. On suppose que f est continue au voisinage de 0 et que $f = o_0(1)$. Que peut on dire de $x \mapsto \int_0^x f$ au voisinage de $x = 0$?

Même question si on suppose $f(x) = o_0(x)$.

***d.** On suppose f dérivable en 0 et $f = o_0(1)$. Que peut on dire de f' au voisinage de 0 ?

Même question si f est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 et si $f(x) = o_0(x)$.

Même question si f est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 et si $f(x) = o_0(x^2)$.

Développements asymptotiques – suite

2. Pour chacune des limites calculées dans l'exercice 2 de la feuille 2, indiquer la vitesse de convergence vers la limite en calculant un équivalent simple (de la fonction si la limite est 0 ou ∞, de la fonction moins sa limite sinon).

3. f et g sont deux fonctions définies au voisinage de 0 et on sait $f(x) = 2x + o_0(x)$, $g(x) = \ln(x) + 3 + o_0(1)$.

Quel développement asymptotique obtient on pour $f + g$ et pour $f \times g$?

Qu'en déduit on pour $\lim\limits_0 f + g$ et pour $\lim\limits_0 f \times g$?

4. Donner un développement asymptotique (les deux premiers termes) en $+\infty$ de $\dfrac{3 + \ln(x)}{2 + x\ln(x)}$ dans l'échelle $\big(x^\alpha (\ln(x))^\beta\big)_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$.

Développements asymptotiques et primitives

On utilisera l'énoncé de cours suivant : Soient f, g deux fonctions continues définies au voisinage de $+\infty$ et F, G des primitives de f et g. On suppose que g est **positive** au voisinage de $+\infty$ (de sorte que G est croissante) et qu'on a $f = o_{+\infty}(g)$. Alors :

- Si G n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$ (ce qui équivaut à $\lim\limits_{+\infty} G = +\infty$ puisque G est croissante) on a $F = o_{+\infty}(G)$.
- Si G est bornée au voisinage de $+\infty$ (ce qui équivaut à G admet une limite finie en $+\infty$ puisque G est croissante) alors F admet une limite finie en $+\infty$ et on a $F(x) - F(+\infty) = o_{x \to +\infty}\big(G(x) - G(+\infty)\big)$ (où on note $F(+\infty), G(+\infty)$ les limites de F et G en $+\infty$).

5. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

Peut on déduire de l'énoncé de cours un équivalent simple en $+\infty$ de l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t + \sqrt{t} + t\sqrt{t}}$?

Donner la vitesse de convergence de cette application vers sa limite en $+\infty$.