Licence L2 PC-SF - Analyse 2 **feuille 2** **23 septembre 2014**

Encadrements

1. En encadrant la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ par des fonctions $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^\alpha}$ sur l'intervalle $[0,1]$ avec α convenable, donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ par des nombres faisant intervenir des radicaux d'abord puis par des nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec p, q entiers.

Pouvez vous en déduire les trois premiers chiffres après la virgule du développement décimal de $\ln(2)$?

Développements asymptotiques

2. En utilisant des développements limités adéquats, calculer les limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x \ln(1 - x^2)}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x - \ln(x)}$$

3. Pour quels entiers n a t-on $\ln(2 + x^2 - 2x) = o_{x\to 1}\big((x-1)^n\big)$?

Pour quels entiers n a t-on $(x-1)^n = o_{x\to 1}\big(\ln(2 + x^2 - 2x)\big)$?

4. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes

$\frac{\cos x}{x^2}$ en $x = 1$, $\frac{x^2+x-2}{1-2x+x^2}$ en $x = 1$, $\frac{\ln(x)}{1-2x+x^2}$ en $x = 1$, $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ en $+\infty$, $1 - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ en $+\infty$

5. Observer $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$. Quelle relation en déduit on entre $\arctan(x)$ et $\arctan(\frac{1}{x})$?

En déduire un développement asymptotique de $\arctan(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Que peut on dire de la limite de $x\cos(\arctan(x))$ en $+\infty$?

***6.** Soit a un réel, I un intervalle centré en a, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Observer en utilisant le théorème de Rolle que si la dérivée $f'(x)$ admet une limite l quand $x \to a$, $x \neq a$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Montrer que la fonction $f :]-1,1[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

admet un prolongement continuement dérivable sur $]-1,1[$.