Licence L2 PC-SF - Analyse 2 **feuille 3** **15 octobre 2014**

Convergence des intégrales impropres et des séries numériques : critère de Riemann

1. Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est elle convergente ?

2. Montrer, en comparant $\ln(x)$ avec x^α pour α convenable, que l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)dx$ est convergente. Pouvez vous la calculer ?

Qu'en est il de $\int_0^1 \ln(x^2+x)\,dx$?

3. Justifier la convergence ou non des intégrales suivantes. Indiquer la vitesse de convergence par un équivalent simple.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x+x^2}\ ,\quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dx\ ,\quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\ ,\quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{\ln(x)}dx\ ,$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(\frac{1}{x^2})dx\ ,\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1-2x+x^2}\ ,\quad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{1-2x+x^2}\ ,\quad \int_0^1 \frac{x^2}{1-2x+x^2}dx\ ,\quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-2x+x^2)}dx$$

4. $\alpha > 0$ fixé. Montrer que $\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$. En déduire que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

5. Observer $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n}$. En déduire que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Que peut on dire de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha \leq 1$?

6. En comparant le terme général de la série avec $\frac{1}{n^\alpha}$ pour α convenable, justifier la convergence ou la divergence des séries suivantes.

Lorsque la série diverge, pouvez vous donner un équivalent simple de la somme partielle S_n quand $n \to \infty$? Lorsque la série converge, pouvez vous donner un équivalent simple du reste R_n lorsque $n \to \infty$?

$$\sum \frac{1}{1+2n+n^2}\ ,\quad \sum \frac{1}{1+3n-n^2}\ ,\quad \sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\ ,\quad \sum \frac{1}{n+\sqrt{n}+n\sqrt{n}}$$

$$\sum \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}\ ,\quad \sum \sin\big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\big)\ ,\quad \sum \ln\big(\frac{1+3n+n^2}{n+n^2}\big)$$

7. Comment se compare $\frac{1}{n\ln(n)}$ à $\frac{1}{n^\alpha}$? Peut on en déduire la convergence ou la divergence de $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$?