Licence L2 PC-SF - Analyse 2 **feuille 4** **24 octobre 2014**

Suites et séries numériques

*Les questions marquées * ne sont pas au programme des examens.*

1. Que peut on dire de $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$?

2. Soit f la fonction donnée par $f(x)=\sqrt{1+x}$. Trouver le ou les x tel que $f(x)=x$.

Soit (u_n) la suite donnée par $u_0\in]-1,+\infty[$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$. ((u_n) est déterminée par le choix de u_0.)

Vérifier que la suite (u_n) est bien définie.

Soit $l\in]-1,+\infty[$ tel que $f(l)=l$. Observer que $|u_{n+1}-l|\leq\frac{1}{2}|u_n-l|$. En déduire que $u_n\to l$ quand $n\to+\infty$.

*La suite (u_n) est elle croissante et majorée ? décroissante et minorée ?

Autre méthode :

Observer que pour tout $n\geq 1$ on a $u_n\geq 0$ puis $|u_{n+2}-u_{n+1}|\leq\frac{1}{2}|u_{n+1}-u_n|$ (utiliser le théorème de Rolle) puis $|u_{n+1}-u_n|\leq\frac{1}{2^{n-1}}|u_2-u_1|$.

En déduire que la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est absolument convergente et donner un majorant simple de la vitesse de convergence.

Qu'en déduit on sur la suite (u_n) ?

* Pouvez vous donner la vitesse de convergence de la suite (u_n) ?

3. Soit α un réel >0 (par exemple $\alpha=1$). On pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha}$.

Observer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $S_{2n}<S_{2n+1}$, $S_{2n+1}=S_{2n}+\mathrm{o}(1)$.

En déduire que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) admettent une limite commune S.

Observer $\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}\leq|S-S_n|\leq\frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Ex. On peut montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$ (voir ex. 6). Donner une approximation décimale de $\ln(2)$ à 10^{-1} près.

*En écrivant $S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{1}{(2k)^\alpha}-\dfrac{1}{(2k+1)^\alpha}\Big)$ donner la vitesse de convergence de la suite $(S_{2n})_n$ (*i.e.* un équivalent simple de $S-S_{2n}$). En déduit on la vitesse de convergence de la suite (S_n) ?

4. Donner un développement asymptotique de $u_n=\ln\big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$ quand $n\to+\infty$ avec un reste en $\mathrm{O}\big(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\big)$ (grand O de $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$: $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ fois une suite bornée).

La série $\sum u_n$ converge t-elle ?

*Vérifie t-elle les hypothèses sur les séries alternées ?

5. $\alpha>0$ fixé. Observer

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\leq\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}\ .$$

Retrouver ainsi la convergence de $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de α.

***6.** En utilisant le calcul classique de $\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$, montrer que $\ln(2)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}+\mathrm{O}\big(\frac{1}{n}\big)$.

***7.** Reconnaissez dans $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ une somme de Riemann et en déduire la limite quand $n\to\infty$.

8. Avec un développement asymptotique du terme général, justifier la convergence ou la divergence des séries suivantes.

*Pouvez vous donner la vitesse de convergence (*i.e.* un équivalent simple du reste R_n) ou de divergence (*i.e.* un équivalent simple de la somme partielle S_n) ?

$$\sum \sin\big(\frac{(-1)^n}{n}\big)\ , \qquad \sum \sin\big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)\ , \qquad \sum \ln\big(1+\frac{(-1)^n}{n}\big)$$

9. En comparant $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ à $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha}$ justifier la convergence ou la divergence de la série en fonction de α.

*Pouvez vous donner la vitesse de convergence ou de divergence de la série ?

10. La série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ se compare t-elle à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} dx$?

*Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sin(n)$ et en déduire par une "intégration par parties" la convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

*La série $\sum \frac{|\sin(n)|}{n}$ est elle convergente ?

***11.** Convergence des séries $\sum \sin(\frac{\sin(n)}{n})$, $\sum \sin(\frac{1+\sin(n)}{n})$.