Licence L2 PC-SF - Analyse 2 **feuille 5** **14 novembre 2014**

Les exercices marqués + sont au programme des groupes P et SF et en bonus pour les autres groupes

Equations différentielles scalaires à variables séparées

+1. Trouver une solution des équations différentielles suivantes satisfaisant la condition initiale indiquée. Sur quel intervalle la solution est elle définie ? *Y a t il unicité de la solution ?

$y' = y^2$, $y(0) = -1$ $y' = y^{\frac{2}{3}}$, $y(1) = 1$ $yy' - x = 0$, $y(1) = -1$ $yy' + x = 0$, $y(1) = 1$

$x^3y' + y = 0$, $y(0) = 0$ $x^3y' - y = 0$, $y(0) = 0$ $x^3y' - y = 0$, $y(0) = 1$ $x^3y' - y = 0$, $y(-1) = 1$
$xy' - 2y = 0$, $y(0) = 1$ $xy' - 2y = 0$, $y(0) = 0$

Equations diff. linéaires d'ordre 1 avec second membre

2. Donner les solutions des eq. diff. suivantes définies sur l'intervalle indiqué puis donner celle vérifiant la condition initiale indiquée :

$y' + 5y = e^x$ sur $\mathbb{R}$, $y(1) = 1$

$y' - xy = x$ sur $\mathbb{R}$, $y(0) = -1$

$xy' - y = x$ sur $]0, +\infty[$

$y'(1 - x^2) + xy = x$ sur $]1, +\infty[$

$(1 - x^2)y' - xy = \frac{2x^3}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$, $y(0) = 2$ puis $y(\frac{1}{2}) = 0$.

Raccord des solutions

3. *(Examen de janvier 2014)* Trouver une fonction y définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, vérifiant $y(1) = 0$ et vérifiant

$$(E) \qquad xy' + y = (x - 1)^2 \quad .$$

Peut on trouver y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y(0) = 2$?

+Peut on trouver y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y(0) = 1$?

+4. Donner les solutions définies sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$ des équations différentielles suivantes. Quelles sont les solutions définies sur $\mathbb{R}$ entier ?

$xy' + y = \cos(x)$.

$xy' + y = e^x$

$\sin(x)y' + \cos(x)y = \sin(x)\cos(x)$.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2

5. Pour chacune des équations différentielles suivantes trouver α tel que $x \mapsto \exp(\alpha x)$ soit solution de l'équation homogène, puis, par la méthode de variation de la constante, trouver la solution de l'équation avec second membre vérifiant les conditions initiales données.

$y'' + 2y' - 3y = \sin(x)$ avec les conditions intiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ avec les conditions intiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

+6. Soit l'éqution différentielle

$$(E) \quad x^2y'' - 3xy' + 4y = \log(x) \quad .$$

Trouver un polynôme de degré 2 solution de l'équation homogène puis résoudre (E).

Quelle est la solution prenant la valeur 1 en $x = 1$ et de dérivée nulle en $x = 1$?

+7. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$$

avec les conditions initiales $y(1) = y'(1) = 0$.

Trouver un entier n tel que $y(x) = x^n$ soit solution de l'équation homogène puis, par la méthode de variation de la constante, résoudre (E) avec les conditions initiales données.