

Les exercices marqués + sont au programme des groupes P et SF et en bonus pour les autres groupes

Révision & compléments

1. Trouver une primitive de chacune des applications suivantes :

$$f(x) = x \sin(x) \quad g(x) = e^{-x} \sin(x) \quad h(x) = xe^{-x} \sin(x) \quad k(x) = x^2 \sin(x) - 3xe^{-x} \sin(x).$$

2. Donner un équivalent simple de  $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La série  $\sum u_n$  converge-t-elle ?

3. Etudier la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\ln(x)} dx$ .

4. Résoudre l'éq. diff  $y' - y = x - x^2$  avec la condition initiale  $y(0) = 1$ .

5. Donner toutes les solutions réelles de l'éq. diff.  $y'' + 2y' - 3y = b(x)$  dans chacun des cas suivants en utilisant la forme générale des solutions (cf cours) :

$$b(x) = x, \quad b(x) = xe^x, \quad b(x) = xe^x \sin(x).$$

Même question pour l'éq.  $y'' + 2y' + 5y = b(x)$  avec

$$b(x) = x^2, \quad b(x) = xe^{-x} \cos(2x), \quad b(x) = 2x^2 - 3xe^{-x} \cos(2x).$$

Pour la dernière donner la solution  $y$  vérifiant  $y(0) = y'(0) = 1$ .

Suites récurrentes linéaires

Pour  $(u_n)$  une suite de nombres réels ou complexes  $\Delta(u_n)$  désigne la suite  $(u_{n+1} - u_n)$ .

6. Calculer  $\Delta^2(u_n) = \Delta(\Delta(u_n))$ . Que vaut  $\Delta^2(u_n)$  pour  $(u_n)$  donnée par  $u_n = an^2$  puis pour  $u_n = a^n$  ?

7. Pouvez-vous mettre la relation de récurrence  $u_{n+2} - 4u_n = n$  sous la forme  $\Delta^2(u_n) = f(n, u_n, \Delta(u_n))$  avec  $f$  fonction numérique de trois variables ?

8. On considère la relation de récurrence

$$(E) \quad u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = n.$$

Trouver un polynôme  $P(X)$  de degré 2 tel que  $u_n = P(n)$  soit solution de (E).

A quelle condition sur le nombre  $a \neq 0$  a-t-on  $(u_n) = (a^n)$  solution de  $(E_0) : u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$  ?

Quelle est la solution  $(u_n)$  de (E) vérifiant  $u_0 = 1, u_1 = 0$  ?

+9. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = u_1 = 1$  et la relation de récurrence  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  (suite de Fibonacci). Calculer de deux façons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

\*10. Quelle peut être la méthode de variation de la constante pour l'équation (E) connaissant une solution particulière de  $(E_0)$  ?