

Durée prévue : 4/3 heure ; documents et matériel électronique interdits

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les questions marquées + compte dans le barème pour les groupes P et SF, sont en bonus pour les autres. Les questions marquées \* sont en bonus (i.e. hors barème).

Justifiez correctement chaque calcul.

1. a. Donner (calculer) le développement limité à l'ordre 2 en  $x = 2$  de la fonction  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ .
- b. Donner le DL à l'ordre 2 en  $x = 0$  de  $\cos(x)$  puis de  $(1 + \cos(x))^{\frac{2}{3}}$ .
- c. Que vaut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{4} - (1 + \cos(x))^{\frac{2}{3}}}{x^2 - x^3} \quad ?$$

2. a. Trouver une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$ .
- b. Donner un équivalent simple quand  $x \rightarrow +\infty$  de  $\int_0^x \frac{t}{1 + t^2} dt$ .

3. a. Justifier la convergence ou la divergence de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) dx$$

- \*b. L'intégrale  $\int_1^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) dx$  converge t-elle ?

4. Justifier la convergence ou la divergence des séries suivantes :

$$\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^3}\right) \quad \sum \frac{(n+1)^2}{n + 2n^3}$$

5. a. Que vaut  $\sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$  en fonction de  $N$  ?

La série  $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$  converge t-elle ? Pouvez vous donner sa somme (ou limite) ?

- +b. Montrer que  $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . En déduire un équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$  de

$$\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

- +c. Que peut on dire de la convergence de la série  $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$  ?

\* Pouvez vous donner la vitesse de convergence ou de divergence de  $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$  ?