L2-MASS Jeux et décision TD n° 3-bis 2007-08

1) Correction ex II, III, IV de l'interrogation

II: $P=(p_{ij})_{1\le i,j\le n}$ matrice stochastique, $u=(u_1,\dots,u_n)$ vecteur de proba fixe par P ($uP=u$). On suppose $\forall i,j\ p_{ij}>0$.

Alors $\forall i\ u_i>0$.

En effet $u_i\geq 0$ et $\Sigma u_i=1$ donc il existe i_0 tq $u_{i_0}>0$. On a $uP=u$ donc pour chaque $i\in\{1,\dots,n\}$ $\sum_{j=1}^{n} u_j p_{ji}=u_i$. Or $u_{i_0}p_{i_0 i}>0$ et $u_j p_{ji}\geq 0$ pour $j\neq i_0$ donc $\sum_{j=1}^{n} u_j p_{ji}>0$, ce qu'on voulait montrer.

On suppose maintenant seulement que P est régulière ie il existe $n>0$ tq P^n est à coefficients >0. u vérifiant $uP=u$, on a $uP^n=u$ (par récurrence sur n). On peut donc appliquer ce qui précède à u et P^n, on obtient $\forall i\ u_i>0$

IV Pour $i\in\{1,\dots,7\}$ appelons état i l'état "le joueur possède $i-1$ euro". A l'instant 0, le joueur se trouve dans l'état 3. Si à l'instant n le joueur se trouve dans l'état 1 ou dans l'état 7, il y reste à l'instant $n+1$. On obtient comme matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ \frac12 & 0 & \frac12 & & & & \\ & \frac12 & 0 & \frac12 & & 0 & \\ & & \frac12 & 0 & \frac12 & & \\ & & & \frac12 & 0 & \frac12 & \\ & 0 & & & \frac12 & 0 & \frac12 \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} =: P$$

La probabilité que le joueur joue au plus cinq fois avant de se retrouver sans argent est $p^{(5)}_{3,1}$: le coefficient de la 3ème ligne, première colonne de P^5.

Si on dispose d'un ordinateur, on peut calculer P^5 : on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11/16 & 0 & 5/32 & 0 & 1/8 & 0 & 1/32 \\ 3/8 & 5/32 & 0 & 9/32 & 0 & 1/8 & 1/16 \\ 7/32 & 0 & 9/32 & 0 & 9/32 & 0 & 7/32 \\ 1/16 & 1/8 & 0 & 9/32 & 0 & 5/32 & 3/8 \\ 1/32 & 0 & 1/8 & 0 & 5/32 & 0 & 11/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la probabilité cherchée est $\frac38$.

Sans ordinateur on calcule directement $p^{(5)}_{3,1}$: c'est la somme des probabilités des chemins de longueur 5 allant de 3 à 1. Si $(3,i_2,i_3,i_4,i_5,1)$ est un tel chemin, sa probabilité est $p_{3,i_2}\times p_{i_2,i_3}\times p_{i_3,i_4}\times p_{i_4,i_5}\times p_{i_5,1}$. Voici la liste des chemins de probabilité non nulle :

$(3,2,1,1,1,1)$, $(3,2,3,2,1,1)$, $(3,4,3,2,1,1)$ de probabilité respectivement $\frac12\times\frac12$, $\frac12\times\frac12\times\frac12\times\frac12$, $\frac12\times\frac12\times\frac12\times\frac12$.

On obtient $p^{(5)}_{3,1}=\frac14+\frac{2}{16}=\frac38$.

2) Graphe associé à une ~~processus~~ matrice de transition :

Graphe dont les sommets sont les états. On met une arête entre deux états i et j orientée de i vers j et "labellée" (étiquetée) p_{ij} si $p_{ij}>0$.

On omet souvent la boucle de i à i labellée p_{ii} sachant $p_{ii}=1-\sum_{j\neq i}p_{ij}$. Ainsi le graphe $1\xrightarrow{1/2}2$ désigne en fait

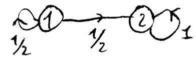
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "1/2"] \arrow[r, "1/2"] & 2 \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd}$$

<u>États transitoires, récurrents</u>

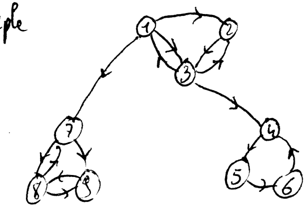
Un chemin d'un état i à un état j est une suite $i=i_1,i_2,\dots,i_k=j$ tq la probabilité de transition de i_α à $i_{\alpha+1}$ est non nulle pour tout $\alpha\in\{1,\dots,k-1\}$

L'état i est dit transitoire s'il existe un état j, un chemin de i à j mais aucun chemin de j à i.

L'état i est dit récurrent s'il n'est pas transitoire.

Exemple  l'état 1 est transitoire, l'état 2 est récurrent.

Exemple



Les états 1, 2, 3 sont transitoires, les autres sont récurrents.

Avec probabilité 1 l'état du système sera confiné au bout d'un certain temps dans le groupe $\{4,5,6\}$ ou dans le groupe $\{7,8,9\}$.

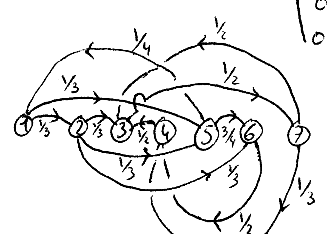
On observe que si la matrice de transition est régulière, aucun état ne peut être transitoire.

Exercice : Soit la matrice de transition

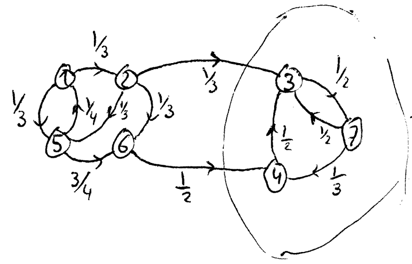
$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Graphe ? Etats récurrents ? La matrice est elle régulière ?

Réponse



Les états récurrents sont 3, 4 et 7. En mettant les états transitoires d'un côté, les états récurrents de l'autre, on obtient le graphe plus lisible suivant (on a omis les boucles $\textcircled{i}\circlearrowright p_{ii}$)



La matrice n'est pas régulière puisqu'il y a des états transitoires.

récurrents

3) Caractérisation des matrices régulières.

On introduit pour chaque paire d'états (i,j) l'ensemble $L(i,j)$ des longueurs des chemins de i à j. Si $L(i,j)$ est non vide on peut considérer le pgcd des éléments de $L(i,j)$. (plus grand commun diviseur)

<u>Prop</u> On suppose que pour toute paire d'états (i,j) il existe un chemin de i à j. Alors le pgcd des éléments de $L(i,i)$ ne dépend pas de i. De plus la matrice de transition est régulière si et seulement si ce pgcd est égal à 1.

Exemple : **On considère la matrice** de transition $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il y a deux états 1, 2. On a $L(1,1) = \{2,4,6,\dots\} = \{2k,\ k \geq 1\}$

$L(1,2) = \{1,3,5,\dots\} = \{2k+1,\ k \geq 0\}$

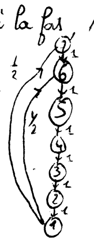
$L(2,1) = L(1,2)$, $L(2,2) = L(1,1)$

pgcd $L(1,1) =$ pgcd $\{2k, k \geq 1\} = 2$ la matrice n'est pas régulière.

Exercice : Un immeuble est formé de 6 étages plus le rez de chaussée. Son ascenseur ne monte que du rez de chaussée et s'arrête alors aléatoirement au 5ème ou au 6ème étage de façon équiprobable. Il ne descend que d'un étage à la fois, ne reste jamais sur place. La matrice de transition P est elle régulière ? Trouver n tq $P^n \in \mathcal{M}_7(]0,1[)$

Réponse : matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

, graphe  (l'état i représente l'étage $i-1$). On a $L(1,1) = \{6,7,12,13,14,18,19,20,21,24,25,26,27,28,30,31,32,33,34,35,\dots\}$

On a $L(i,j) \neq \emptyset$ $\forall i,j$ et pgcd $(L(1,1)) = 1$ donc P est régulière. On voit que $29 \notin L(1,1)$ donc $P_{1,1}^{(29)} = 0$ donc $P^{29} \notin \mathcal{M}_7(]0,1[)$ donc $P^k \notin \mathcal{M}_7(]0,1[)$ pour $k \leq 29$!