Exercice 18 : Module projectif de rang 1 sur un anneau factoriel

Soit A un anneau comutatif. On note $A^\times$ le groupe formé des éléments inversibles pour la multiplication. A est intègre si l'ensemble $A \setminus \{0\}$ est stable pour la multiplication. A est factoriel si A est intègre et si le monoïde quotient $(A \setminus \{0\})/A^\times$ est libre, ce qui revient à dire qu'il existe une partie $\mathcal{P}$ de $A \setminus \{0\}$ telle que l'application

$$\begin{array}{rcl} A^\times \times (\mathbb{N},+)^{(\mathcal{P})} & \longrightarrow & A \setminus \{0\} \\ (u,(n_p)_{p\in\mathcal{P}}) & \mapsto & u\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{n_p} \end{array}$$

est un isomorphisme. Lorsque A est factoriel, toute famille finie d'éléments non tous nuls de A admet un pgcd, et si $d \in A$ divise le produit ab alors on peut écrire $d = d_1d_2$ avec $d_1|a$ et $d_2|b$.

Supposons A factoriel avec $\mathcal{P}$ comme ensemble de représentants des éléments irréductibles et soit $f \in A \setminus \{0\}$; alors $A[\frac{1}{f}]$ est factoriel avec comme ensemble de représentants des éléments irréductibles $\mathcal{P} \setminus \{p \in \mathcal{P}, p|f\}$.

Matrices idempotentes de rang 1

Soit A un anneau intègre ; on note $K = A[\frac{1}{f}, f \in A \setminus \{0\}]$ le corps des fractions de A.

Soit $P \in \mathrm{M}_n(A)$ une matrice dont le rang, comme matrice de $\mathrm{M}_n(K)$, est 1 ; alors P s'écrit dans $\mathrm{M}_n(K)$ comme le produit ${}^t(a_1 \dots a_n)(b_1 \dots b_n)$ avec $(a_i),(b_j) \in K^n$ (on peut prendre pour ${}^t(a_i)$ une colonne non nulle de P). Par définition de K il existe $d \in A\setminus\{0\}$ tel qu'on ait $\forall i$, $da_i \in A$ et $db_i \in A$. Puisque le produit a_ib_j est dans A pour tout (i,j), d^2 divise le produit $(da_i)(db_j)$ dans A. Si A est factoriel alors d^2 divise le produit $\mathrm{pgcd}((da_i))\mathrm{pgcd}((db_i))$ dans A donc s'écrit d_1d_2 avec $d_1|\mathrm{pgcd}((da_i))$ et $d_2|\mathrm{pgcd}((db_i))$ de sorte que P est le produit ${}^t(\frac{da_i}{d_1})(\frac{db_i}{d_1})$ dans $\mathrm{M}_n(A)$. Autrement dit, si A est factoriel alors on peut écrire

$$P = {}^t(a_i)(b_i)$$

avec $(a_i),(b_j) \in A^n$.

Soient $(a_i),(b_i) \in A^n$; la matrice $P = {}^t(a_i)(b_i)$ vérifie $P^2 = P$ si et seulement si on a la relation de Bezout $\sum_i a_ib_i = 1$. Si cette relation est vérifiée alors $(a_i) = \sum_k a_kb_k(a_i)$ est dans l'image de P et engendre l'image de P. Puisque A est supposé intègre, l'image de P est un A-module libre de rang 1.

On en déduit : Soit A un anneau factoriel et M un A-module projectif de type fini tel que $K \otimes_A M$ est de dimension 1 sur K ; alors M est libre. (L'hypothèse M de type fini est impliquée par les autres conditions : voir [Bourbaki, Algèbre, chap. II., §5, n$^{\mathrm{o}}$ 5, prop.9])

Invariance du rang

Soient A un anneau intègre, K son corps de fraction, $\phi : A \to k$ un homomorphisme d'anneaux de A dans un corps k et M un A-module projectif de type fini ; alors on a l'égalité

$$\dim_k(k \otimes_A M) = \dim_K(K \otimes_A M)\ .$$

En effet : $\ker(\phi)$ est un idéal premier de A. Notons A' l'anneau localisé $A[\frac{1}{f}, f \notin \ker(\phi)]$. A' est un sous-anneau de K égal à K si $\ker(\phi) = 0$. Puisque les images des $f \notin \ker(\phi)$ dans k sont inversibles, $\phi : A \to k$ se prolonge en un homomorphisme d'anneaux $A' \to k$.

Puisque M est projectif de type fini, on peut écrire $A^n \simeq M \oplus N$ pour un certain entier n et un certain module N ; alors $A'^n = A' \otimes_A A^n \simeq (A' \otimes_A M) \oplus (A' \otimes_A N)$ donc $A' \otimes_A M$ est un A'-module projectif de type fini. Si $\ker(\phi) \neq 0$ alors $\ker(\phi)A'$ est le seul idéal maximal de A' et on sait qu'un module projectif de type fini sur un anneau local est libre. Dans le cas contraire A' est un corps. . . .

On a $K \otimes_A M \simeq K \otimes_{A'} (A' \otimes_A M)$ donc $\dim_K(K \otimes_A M) = \dim_{A'}(A' \otimes_A M)$. De même $k \otimes_A M \simeq k \otimes_{A'} (A' \otimes_A M)$ donc $\dim_k(k \otimes_A M) = \dim_{A'}(A' \otimes_A M)$.

[1] 25 nov. 2011 – `http://math.unice.fr/~dehon/Ens/M2fibralg/`

Exemple : Soit X un espace compact ($\neq \emptyset$), x un élément de X, A un sous-anneau intègre de $C(X)$ et M un A-module projectif de type fini. Soit ξ "le" fibré vectoriel sur X dont le module des sections est isomorphe à $C(X) \otimes_A M$ (ξ n'est unique qu'à un isomorphisme près). Soit $\phi : C(X) \to \mathbb{R}$ l'application $f \mapsto f(x)$. On a $\mathbb{R} \otimes_{C(X)} \Gamma(\xi) \simeq \xi_x$ (la fibre de ξ en x). On obtient que le rang de M coïncide avec $\dim_{\mathbb{R}}(\xi_x)$.

Fibré de Moebius sur le cercle

Le cercle S^1 est la partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2=1\}$ qu'on identifie avec $\{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$. Le fibré de Moebius μ est formé de la famille des droites de $\mathbb{R}^2$ passant par un point de S^1, tournant le long de S^1 et ayant fait exactement un demi-tour lorsqu'on est revenu à l'origine.

Notons ϵ le fibré en droites trivial $\mathrm{E}(\epsilon) = \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathrm{S}^1}} \mathrm{S}^1$. Le fibré μ peut se décrire comme :

$$E(\mu) = \{(z^2, \lambda z), z \in \mathrm{S}^1, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{S}^1 \times \mathbb{C} = \mathrm{E}(\epsilon^2)$$

muni de la restriction à $\mathrm{E}(\mu)$ de la projection sur S^1.

On peut montrer que μ est localement trivial ce qui entraîne que le morphisme $\mu \to \epsilon^2$ admet un rétract puisqu'il est injectif en tout point. On peut aussi expliciter ce rétract, ce qui entraîne que μ est localement trivial : Pour $z \in \mathrm{S}^1$ notons $\mathrm{pr}_{<\sqrt{z}>}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur la droite réelle engendrée par les racines complexes de z. Ecrivons $z = x+iy$; la matrice de $\mathrm{pr}_{<\sqrt{z}>}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix} .$$

Le rétract en question est l'application $\mathrm{E}(\epsilon^2) \to \mathrm{E}(\mu)$, $(z,(s,t)) \mapsto (z, \mathrm{pr}_{<\sqrt{z}>}(s,t))$ qui est bien continue et linéaire sur chaque fibre.

Notons p l'endomorphisme composé $\Gamma(\epsilon^2) = C(\mathrm{S}^1)^2 \to \Gamma(\mu) \to \Gamma(\epsilon^2)$ induit par la composée $\epsilon^2 \to \mu \to \epsilon^2$. p est un morphisme idempotent de $C(\mathrm{S}^1)$-modules, d'image isomorphe à $\Gamma(\mu)$, de matrice dans la base canonique de $C(\mathrm{S}^1)^2$ égale à $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{pr}_1 & \mathrm{pr}_2 \\ \mathrm{pr}_2 & 1-\mathrm{pr}_1 \end{pmatrix}$, où pr_1, respectivement pr_2, est l'application $\mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$, $x+iy \mapsto x$, respectivement $x+iy \mapsto y$.

Posons $\Lambda = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, X, Y]/(X^2+Y^2-1)$, $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+X & Y \\ Y & 1-X \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\Lambda)$ et $M = \mathrm{im}(P)$. P est idempotente donc $M \oplus \ker(P) = \Lambda^2$. L'application $\Lambda \to C(\mathrm{S}^1)$, $X \mapsto \mathrm{pr}_1$, $Y \mapsto \mathrm{pr}_2$ est un homomorphisme (injectif) d'anneaux. L'image de P dans $\mathrm{M}_2(C(\mathrm{S}^1))$ via $\Lambda \to C(\mathrm{S}^1)$ est la matrice du projecteur $p : \Gamma(\epsilon^2) \circlearrowleft$, d'où l'isomorphisme

$$\Gamma(\mu) \simeq C(\mathrm{S}^1) \otimes_\Lambda M .$$

Le fibré de Moebius n'est pas isomorphe à ϵ : la partie $\mathrm{E}(\mu) \setminus \{(z,0), z \in \mathrm{S}^1\}$ (le complémentaire dans $\mathrm{E}(\mu)$ de la "section nulle") est connexe puisque l'application $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}_+^\times \to \mathrm{E}(\mu) \setminus \{(z,0), z \in \mathrm{S}^1\}$, $(z,\lambda) \mapsto (z^2, \lambda z)$ est surjective, alors que ce n'est pas le cas pour $\mathrm{E}(\epsilon) \setminus \{(z,0), z \in \mathrm{S}^1\}$. Donc le $C(\mathrm{S}^1)$-module $\Gamma(\mu)$ n'est pas libre.

Factorialité de certaines Λ-algèbres

Soit A une sous Λ-algèbre de $C(\mathrm{S}^1)$ (par exemple $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$) ; alors $\Gamma(\mu) \simeq \mathrm{im}(p)$ est isomorphe à $C(\mathrm{S}^1) \otimes_A (A \otimes_\Lambda M)$ et n'est pas $C(\mathrm{S}^1)$-libre donc $A \otimes_\Lambda M$ n'est pas A-libre. D'autre part la dimension de la fibre en un point de μ est 1 donc si A est intègre M est de rang 1. On en déduit que A n'est factoriel.

L'anneau $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ est factoriel : l'application

$$\mathbb{C}[X, \frac{1}{X}] \to \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1), \quad X \mapsto X+iY$$

est un isomorphisme ($X+iY$ est inversible dans $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$, d'inverse $X-iY$). On sait que l'anneau $\mathbb{C}[X]$ est factoriel, donc également $\mathbb{C}[X, \frac{1}{X}]$ d'après ce qui a été dit au tout début.

On en déduit : les sous-anneaux de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ sont intègres (en particulier $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$) ; le $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$-module $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est libre ; le complexifié du fibré μ est trivial.

Références :

[R. Swan, Vector bundles and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc. (1962)], l'exposé Passe-Partout de G. Elencwajg de juin 2011,