M2 Math – Fibrés topologiques & algébriques – 2011-12

Feuille d'exercices 1 : $C(X)$

Recouvrements et continuité

1. Soit X un espace métrique compact et (U_α) un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$, la boule ouverte $B(x, \epsilon)$ est incluse dans l'un des U_α.

2. Rappeler pourquoi les sous-espaces compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties fermées et bornées.

3. Soient $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques et A une partie de X. Montrer que la restriction $A \to f(A)$, $x \mapsto f(x)$ est continue pour les topologies induites sur A et $f(A)$ par X et Y.

4. Soient X, Y deux espaces topologiques, (U_α) un recouvrement ouvert de X et pour chaque α $f_\alpha : U_\alpha \to Y$ une application continue. On suppose que pour tout couple (α, β) les restrictions de f_α et f_β à $U_\alpha \cap U_\beta$ coïncident. Montrer qu'il existe une application continue f et une seule dont la restriction à chaque U_α coïncide avec f_α.

5. Soient X, Y comme précédemment, (F_α) un recouvrement localement fini de X par des fermés et pour chaque α $f_\alpha : F_\alpha \to Y$ une application continue. On suppose comme précédemment que pour tout couple (α, β) les restrictions de f_α et f_β à $F_\alpha \cap F_\beta$ coïncident. Montrer qu'il existe une application continue f et une seule prolongeant les f_α. Que se passe t-il si on ne suppose plus le recouvrement (F_α) localement fini ?

6. Soient A un anneau commutatif, I un idéal propre de A (*i.e.* distinct de A). Montrer que I est maximal ssi

$$\forall a \in A \setminus I, \exists b \in A, 1 - ab \in I \ ,$$

autrement dit ssi l'anneau quotient A/I est un corps.

Idéaux de $C(X)$ et zéros des fonctions

7. Soient X un espace topologique et I un idéal de $C(X)$. Montrer que $V(I) := \{x \in X, \forall f \in I, f(x) = 0\}$ est une partie fermée de X.

Montrer que si X est compact et si I est distinct de $C(X)$ alors $V(I)$ est non vide.

8. Soit I l'ensemble des applications continues $[0, 1[\to \mathbb{R}$ à support compact. Observer que $V(I)$ est vide. En déduire l'existence d'un idéal maximal M de $C([0, 1[)$ tel que $V(M) = \emptyset$. Pouvez vous expliciter un tel idéal ?

9. Soient X un espace topologique et A une partie de X. On note I_A l'idéal $\{f \in C(X), f_{|A} = 0\}$ de $C(X)$. Montrer que si A est un singleton alors I_A est maximal. (Considérez pour $x \in X$ l'application $C(X) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$.)

On suppose que X est normal (voir la définition). Montrer en utilisant le lemme d'Urysohn que $V(I_A) = \bar{A}$ (la fermeture de A dans X). En déduire que si I_A est maximal alors A est un singleton.

Quels sont les idéaux maximaux de $C(X)$ lorsque X est compact ?

10. Soit X un ensemble ; on appelle filtre sur X un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de X vérifiant les trois conditions :

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(2) $\forall F, G \in \mathcal{F}, F \cap G \in \mathcal{F}$

(3) $\forall F \subset G \subset X, F \in \mathcal{F} \Rightarrow G \in \mathcal{F}$

Montrer qu'on a pour $\mathcal{F}$ un filtre sur X l'équivalence entre

(i) $\mathcal{F}$ est maximal pour l'inclusion

(ii) $\forall A \subset X, A \in \mathcal{F}$ ou $\big(\exists F \in \mathcal{F}, A \cap F = \emptyset\big)$

(iii) $\forall A, B \subset X, A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow \big(A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}\big)$.

Soit (A_α) une famille de parties de X telle que les sous familles finies soient toutes d'intersection non vide. Montrer avec le théorème de Zorn qu'il existe un filtre maximal contenant tous les A_α.

Soit X un espace topologique. A un idéal I de $C(X)$ on associe l'ensemble $\mathcal{F}_I = \{F \subset X, \exists f \in I, f^{-1}(0) \subset F\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un filtre ssi $I \neq C(X)$.

Inversement à un filtre $\mathcal{F}$ sur X on associe l'ensemble $I_{\mathcal{F}} = \{f \in C(X), f^{-1}(0) \in \mathcal{F}\}$. Vérifier que $I_{\mathcal{F}}$ est un idéal de $C(X)$. Montrer que $I_{\mathcal{F}}$ est premier ssi le filtre $\mathcal{F}$ est maximal pour l'inclusion.

Prenons $X = [0,1]$ et soit $\mathcal{F}$ un filtre maximal contenant toutes les parties $\{\frac{1}{k}, k \geq n\}$, $n \geq 1$. Montrer que l'idéal $I_{\mathcal{F}}$ est premier mais n'est pas maximal. A quelle condition sur X les idéaux premiers de $C(X)$ sont ils tous maximaux ?

Généralisation : Soient $f \in C([0,1])$ s'annulant en 0 et $\mathcal{F}$ un filtre maximal contenant les voisinages épointés de 0. On forme $I_{f,\mathcal{F}} = \{g \in C(X), \exists F \in \mathcal{F}$ et $\alpha > 0, g_{|F} = \mathrm{O}_x(f^\alpha)\}$. Montrer que $I_{f,\mathcal{F}}$ est un idéal premier. Est il maximal ?

Spectre d'un anneau et théorème de représentation

11. Soient A, B deux anneaux commutatifs et $f : A \to B$ un homomorphisme surjectif. Montrer que si J est un idéal maximal de B alors $f^{-1}(J)$ est un idéal maximal de A. Que se passe t-il si on ne suppose plus f surjective ?

12. Soit A un anneau commutatif. On note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. Si I est un idéal de A on note F_I l'ensemble $\{J \in \mathrm{Spec}(A), I \subset J\}$. Montrer que les F_I sont les fermés d'une topologie sur $\mathrm{Spec}(A)$ qu'on appelle topologie de Zariski. Quels axiomes de séparation vérifie $\mathrm{Spec}(A)$?

Montrer que tout homomorphisme $\phi : A \to B$ entre anneaux commutatifs induit par image réciproque une application continue $\phi^* : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$.

13. Soit X un espace normal. Montrer que l'application $X \to \mathrm{Spec}(C(X)), x \mapsto I_{\{x\}}$ est un homéomorphisme de X sur son image, où $\mathrm{Spec}(C(X))$ est muni de la topologie de Zariski.

14. Soient X, Y deux espaces topologiques non vide, x un élément de X et $\phi : C(Y) \to C(X)$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que $I = \phi^{-1}(I_{\{x\}})$ est un idéal maximal de $C(Y)$ (montrez que l'application $C(Y)/I \to C(X)/I_{\{x\}}$ induite par ϕ est surjective). En déduire que si Y est compact et X normal, l'application continue $\phi^* : \mathrm{Spec}(C(X)) \to \mathrm{Spec}(C(Y))$ induit une application continue encore notée $\phi^* : X \to Y$.

15. Soient X, Y deux espaces topologiques. On suppose X normal et Y compact. A une application continue $f : X \to Y$ on associe l'homomorphisme d'anneaux $f^* : C(Y) \to C(X)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Montrer que l'application $f \mapsto f^*$ est une bijection d'inverse l'application $\phi \mapsto \phi^*$ (notation de l'exercice ci-dessus).