M2 Math – Fibrés topologiques & algébriques – 2011-12

Feuille d'exercices 3 : Localisation des anneaux et modules

Dans toute la suite A est un anneau commutatif.

Anneaux

1. Soit $f \in A$; on lui associe l'anneau $A[\frac{1}{f}] = A[X]/(fX-1)$ muni de l'homomorphisme composé $A \to A[X] \to A[X]/(fX-1)$ qui en fait une A-algèbre.

$A[\frac{1}{f}]$ est isomorphe à l'ensemble quotient $(A \times \mathbb{Z})/(a,n) \sim (af, n+1)$ muni des lois $(a,m)+(b,n) = (af^n + bf^m, m+n)$ et $(a,m)(b,n) = (ab, m+n)$.

On note $\mathrm{Ann}(f)$ l'idéal $\{a \in A, af = 0\}$ (idéal annulateur de f). Le noyau de l'homomorphisme $A \to A[\frac{1}{f}]$ est la réunion des $\mathrm{Ann}(f^n)$, $n \geq 1$. (On écrit formellement $\frac{1}{1-fX} = \sum_{n=0}^{\infty} f^n X^n$ puis $a = (1-fX)\sum_{n=0}^{\infty} af^n X^n$.)

Notons A_f le quotient $A/\mathrm{Ann}(f)$. (Cette notation n'est pas standard : dans [Bourbaki, algèbre commutative] la notation A_f désigne l'anneau $A[\frac{1}{f}]$.) La multiplication par f $A \to A$ se factorise par A_f et induit un isomorphisme $A_f \to fA$ (pour quelle structure ?). La composée $A_f \to A \to A_f$ est la multiplication par f. Le noyau de la composée $A \to A_f \to (A_f)_f$ est $\mathrm{Ann}(f^2)$ d'où un isomorphisme $A_{f^2} \to (A_f)_f$. On obtient ainsi une suite d'homomorphismes surjectifs $A_{f^n} \to A_{f^{n+1}}$ dont les noyaux sont isomorphes aux quotients $\mathrm{Ann}(f^{n+1})/\mathrm{Ann}(f^n)$. La multiplication par f $A_f \to A_f$ est injective ssi l'inclusion $\mathrm{Ann}(f) \subset \mathrm{Ann}(f^2)$ est une égalité, auquel cas les applications $A_{f^n} \to A_{f^{n+1}}$ sont des isomorphismes pour $n \geq 1$.

Notons A_{f^∞} le quotient $A/\cup_n \mathrm{Ann}(f^n)$. Ce quotient s'identifie à l'image de $A \to A[\frac{1}{f}]$. La limite injective (ou colimite) de la suite $(A_{f^n} \to A_{f^{n+1}})_n$ est isomorphe à A_{f^∞}. La multiplication par f $A_{f^\infty} \to A_{f^\infty}$ est injective. Si $\mathrm{Ann}(f) = \mathrm{Ann}(f^2)$ alors $A_f \to A_{f^\infty}$ est iso, l'application $A \to A_{f^\infty}$ induit une bijection $fA \to fA_{f^\infty}$.

Ex. 1) $A = \mathbb{Z}$, $f = 2$. On a $\mathrm{Ann}(2^n) = \{0\}$ pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty} \subset \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathbb{Q}$, les inclusions sont strictes.

2) $A = k[X]/(X^3 - X^2 - X + 1)$ où k est un corps, $f = [X-1]$ = classe de $X-1$. On a $\mathrm{Ann}(f) = ([X^2-1]) \neq \mathrm{Ann}(f^2) = ([X+1])$, $A[\frac{1}{f}] \simeq k[\frac{1}{2}]$, $A \to A[\frac{1}{f}]$ est surjective.

3) $A = C(X)$ où X est un espace topologique, $f : X \to \mathbb{R}$ continue alors $\mathrm{Ann}(f) = \{g \in C(X), g_{|f^{-1}(\mathbb{R}^\times)} = 0\} = \mathrm{Ann}(f^2)$. L'application $C(X) \to C(\mathrm{Supp}\, f)$ se factorise en une injection $C(X)_f \to C(\mathrm{Supp}\, f)$. Si X est normal alors $C(X)_f \to C(\mathrm{Supp}\, f)$ est iso et induit un iso $C(\mathrm{Supp}\, f) \to fC(X)$. La multiplication par f $C(\mathrm{Supp}\, f) \to C(\mathrm{Supp}\, f)$ est injective mais pas bijective a priori.

Prenons $X = [0,1]$ et $f : x \mapsto x$ alors $A[\frac{1}{f}] \simeq \{g \in C(]0,1]), \exists n \in \mathbb{N}, g(x) = \mathrm{O}_{x\to 0}(\frac{1}{x^n})\}$. Les applications $C([0,1]) \to C([0,1])[\frac{1}{f}] \to C(]0,1])$ sont injectives non surjectives.

2. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A ; on lui associe l'anneau $A_\mathfrak{m}$ égal à l'ensemble quotient $(A \times \mathfrak{m}^c)/(a,f) \sim (ag, fg)$ muni des lois $(a,f)+(b,g) = (ag+bf, fg)$ et $(a,f)(b,g) = (ab, fg)$, où $\mathfrak{m}^c$ désigne le complémentaire de $\mathfrak{m}$ dans A. L'idéal $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de $A_\mathfrak{m}$: tout élément de $A_\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ est inversible. On dit que l'anneau $A_\mathfrak{m}$ est local et qu'il est le localisé de A en $\mathfrak{m}$. Le noyau de l'application $A \to A_\mathfrak{m}$ est $\{a \in A, \exists f \in \mathfrak{m}^c, af = 0\}$. La composée $A \to A_\mathfrak{m} \to A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ induit un isomorphisme de corps (dits résiduels) $A/\mathfrak{m} \to A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$. Si f est un élément de $\mathfrak{m}^c$, l'application $A \to A_\mathfrak{m}$ induit un homorphisme d'anneaux $A[\frac{1}{f}] \to A_\mathfrak{m}$.

Ex. 1) $A = k[X]$ où k est un corps, $\mathfrak{m} = (X)$ alors $A_\mathfrak{m} = \{R \in k(X), 0 \text{ n'est pas un pôle de } R\}$, contient strictement A.

2) $A = k[X]/X^3$, $\mathfrak{m} = (X)$ l'unique idéal maximal alors $A \to A_\mathfrak{m}$ est iso.

3) $A = C(X)$ avec X compact $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{m} = \{f \in C(X), f(x) = 0\}$ pour un $x \in X$, $\mathfrak{m}^c = \{f \in C(X), f(x) \neq 0\} = \{f \in C(X), x \in f^{-1}(\mathbb{R}^\times)\}$. $\mathrm{Ker}(C(X) \to C(X)_\mathfrak{m}) = \{f \in C(X), f \text{ est nulle sur un vois. de } x\} \simeq \{f \in C(X \setminus \{x\}) \text{ à support compact}\}$. L'application $C(X) \to C(X)_\mathfrak{m}$ est surjective.

Modules

3. L'application naturelle $\mathbb{Z}/2 \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z})$ n'est pas surjective.

4. Déf. Un A-module M est de présentation finie s'il existe des entiers $m, n \geq 0$, une application A-linéaire $f : A^m \to A^n$ et un isomorphisme $A^n/\mathrm{im}(f) \simeq M$. Les modules projectifs de type fini sont de présentation finie. A est noethérien ssi tout module de type fini est de présentation finie

Ex. L'idéal de $C([0,1])$ engendré par $x \mapsto x$ et $x \mapsto x \log x$ (prolongé par continuité en 0) est un $C([0,1]$ module de présentation finie, mais pas l'idéal engendré par $x \mapsto x$ et $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$.

Soient M un A-module de présentation finie et $\varphi : A^n \to M$ une application A-linéaire surjective ; alors $\ker(\varphi)$ est de type fini.

5. Soient M un A-module et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Le quotient $M/\mathfrak{m}M$ s'identifie au $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $A/\mathfrak{m} \otimes_A M$.

Lemme (Nakayama) Supposons l'anneau A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et soit M un A-module de type fini tel que $A/\mathfrak{m} \otimes_A M = 0$ alors $M = 0$.

Ex. $I_{\{0\}} = \{f \in C([0,1]), f(0) = 0\}$ idéal maximal de $C([0,1])$, Prenons pour A l'anneau $C([0,1])$ localisé en $I_{\{0\}}$ et pour M l'idéal $\mathfrak{m} = I_{\{0\}}A$. A s'identifie au quotient $C([0,1])/\sim$ où $f \sim g$ si f et g coïncident au voisinage de 0. On a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ (écrire une application continue comme somme d'une application positive et d'une application négative) donc $A/\mathfrak{m} \otimes_A M = 0$ bien que $M \neq 0$. Conclusion ?

Corollaire Supposons A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit M un A-module de type fini et $e_1, \ldots, e_n \in M$ alors (e_i) est une famille génératrice de M ssi $(1 \otimes e_i)$ est une famille génératrice de $A/\mathfrak{m} \otimes_A M$. (e_i) est une famille génératrice minimale de M ssi $(1 \otimes e_i)$ est une base de $A/\mathfrak{m} \otimes_A M$.

Ex. Les applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ forment une famille génératrice minimale de l'idéal de $C([0,1])$ engendré par ces deux éléments, mais ce n'est pas une base.

Posons $A = \mathbb{Z}_{(2)}$ et soit $M = \mathbb{Q} = A[\frac{1}{2}]$ alors $\mathbb{Z}/2 \otimes_A M$ est libre de rang 0 mais M n'est pas de type fini.

6. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de A^n alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base.

7. Soit M un A-module de présentation finie et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Considérons les énoncés :

(i) $A_\mathfrak{m} \otimes_A M$ est un $A_\mathfrak{m}$-module libre.

(ii) $A_\mathfrak{m} \otimes_A M$ est un $A_\mathfrak{m}$-module projectif.

(iii) $\exists f \in \mathfrak{m}^c$, $A[\frac{1}{f}] \otimes_A M$ est un $A[\frac{1}{f}]$-module libre.

(iv) $\exists f \in \mathfrak{m}^c$, $A_{f^\infty} \otimes_A M$ est un A_{f^∞}-module libre (avec les notations définies plus haut).

(v) $\exists f \in \mathfrak{m}^c$, $fM \simeq A_f \otimes_A M$ est un A_f-module libre.

On a $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftarrow (iv) \Leftarrow (v)$.

Ex. 1) $M = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ vu comme $\mathbb{Z}$-module vérifie (iii) mais pas (iv).

2) $A = C(X)$ avec X compact. Soit $x \in X$ et $f \in C(X)$ ne s'annulant pas en x. Il existe $g \in C(X)$ ne s'annulant pas en x tel que $\operatorname{Supp} g \subset f^{-1}(\mathbb{R}^\times)$ d'où un homomorphisme d'anneaux $C(\operatorname{Supp} g) = C(X)_g \to C(X)[\frac{1}{f}]$. On en déduit $(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$.

8. Soient $\varphi : M \to N$ un morphisme entre A-modules et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. On suppose que M est de type fini et que $A_\mathfrak{m} \otimes_A \varphi : A_\mathfrak{m} \otimes_A M \to A_\mathfrak{m} \otimes_A N$ est le morphisme nul, alors il existe $f \in \mathfrak{m}^c$ tel que $f\varphi$ est le morphisme nul.

Soient M un A-module de présentation finie, N un A-module et $\phi : A_\mathfrak{m} \otimes_A M \to A_\mathfrak{m} \otimes_A N$ un morphisme de $A_\mathfrak{m}$-modules ; alors il existe un morphisme de A-module $\varphi : M \to N$ et un élément $f \in \mathfrak{m}^c$ tel que $f\phi = A_\mathfrak{m} \otimes_A \varphi$.

9. Soit M un A-module. On suppose que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A on a $A_\mathfrak{m} \otimes_A M = 0$; alors $M = 0$.

Soit $\varphi : M \to N$ un morphisme entre A-modules. On suppose que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_\mathfrak{m} \otimes_A \varphi$ est surjectif, respectivement injectif ; alors φ est surjectif, respectivement injectif.

10. Soit $\varphi : M \to N$ un morphisme de A-modules. On suppose que N est de présentation finie et que φ admet localement une section, *i.e.* pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, le morphisme de $A_\mathfrak{m}$-modules $A_\mathfrak{m} \otimes_A \varphi$ admet une section, alors φ admet une section.

Indications : Soit $\psi_\mathfrak{m}$ une section de $A_\mathfrak{m} \otimes_A \varphi$, $\mathfrak{m}$ décrivant les idéaux maximaux de A. Pour chaque $\mathfrak{m}$, il existe $f_\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}^c$ et $\psi'_\mathfrak{m} : M \to N$ tels que $A_\mathfrak{m} \otimes_A \psi'_\mathfrak{m} = f_\mathfrak{m}\psi_\mathfrak{m}$; alors $A_\mathfrak{m} \otimes_A (\varphi \circ \psi'_\mathfrak{m}) = f_\mathfrak{m}\mathrm{id}$. Il existe $g_\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}^c$ tel que

$g_{\mathfrak{m}}\varphi \circ \psi'_{\mathfrak{m}} = g_{\mathfrak{m}} f_{\mathfrak{m}} \mathrm{id} : M \to N$. Il existe $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k$ et des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ tels que $\sum_i \alpha_i g_{\mathfrak{m}_i} f_{\mathfrak{m}_i} = 1$; alors $\sum_i \alpha_i g_{\mathfrak{m}_i} \psi'_{\mathfrak{m}_i}$ est une section de ϕ.

Qu'en est il si on suppose seulement N de type fini ?

Corollaire. Soit M un A-module de présentation finie alors M est projectif ssi M est localement libre.