La preuve de Lionel Schwartz en résumé

Soit X un espace (profini fibrant) dont la cohomologie modulo 2 est dans $\mathcal{U}_1$ mais pas dans $\mathcal{U}_0$. Quite à quotienter X par son 0-squelette, on suppose X pointé et connexe. Quite à remplacer X par sa suspension, on suppose les produits nuls sur $\bar{\mathrm{H}}^*X$.

(Soit H la cohomologie modulo 2 réduite de $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$, $\mathrm{F}(1)$ le sous-module instable de $\bar{\mathrm{H}}$ engendré par la classe non nulle u de degré 1 et $\bar{\mathrm{T}}$ l'adjoint à gauche de $N \mapsto \mathrm{H} \otimes N$ dans $\mathcal{U}$.)

On observe que l'unité d'adjonction $\bar{\mathrm{H}}^*X \to \bar{\mathrm{H}} \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ se factorise par l'inclusion $\mathrm{F}(1) \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X \to \bar{\mathrm{H}} \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ et que le noyau et le conoyau du morphisme $\bar{\mathrm{H}}^*X \to \mathrm{F}(1) \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ sont dans $\mathcal{U}_0$ (*i.e.* sont localement finis) (cf [2]).

Le module instable $\bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ est dans $\mathcal{U}_0$ et est non trivial. Soit d le degré minimal d'un élément non nul.

Si $d = 0$, soit $(\bar{\mathrm{H}}^*X)_1$ l'idéal de $\bar{\mathrm{H}}^*X$ engendré par les éléments nilpotents. Alors $\bar{\mathrm{H}}^*X/(\bar{\mathrm{H}}^*X)_1$ est un module instable non trivial, réduit, dans $\mathcal{U}_1$ donc nul en degré autre que 0 ou une puissance de 2, et a une structure d'algèbre instable (non-unitaire), ce qui n'est pas compatible.

Supposons désormais $d \geq 1$. Comme l'application $\bar{\mathrm{H}}^*X \to \bar{\mathrm{H}}^*(X/\mathrm{Sk}_dX)$ induit un isomorphisme $\bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X \to \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*(X/\mathrm{Sk}_{d-1}X)$, on peut supposer X $d-1$-connexe (de telle sorte que, nous le verrons, $\bar{\mathrm{H}}^*X$ soit d-nilpotent).

Soit $\omega \in \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ un élément non nul de degré d. Le sous-module instable engendré par ω est fini. On en déduit la relation $\mathrm{Sq}_d(u^{2^k} \otimes \omega) = u^{2^{k+1}} \otimes \omega$ dans $\mathrm{F}(1) \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ pour k assez grand. En particulier $u^{2^k} \otimes \omega$ est dans l'image de l'application $\bar{\mathrm{H}}^*X \to \mathrm{F}(1) \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ pour k assez grand.

Soit k_0 un tel entier suffisament grand. On choisit une classe $\alpha_{k_0,d} \in \bar{\mathrm{H}}^*X$ d'image $u^{2^k_0} \otimes \omega$ et on pose $\alpha_{k,d} = (\mathrm{Sq}_d)^{k-k_0}\alpha_{k_0,d}$ pour $k > k_0$, de sorte que $\alpha_{k,d}$ est d'image $u^{2^k} \otimes \omega$.

Notons pour $0 \leq l \leq d$, X_l l'espace de lacets itéré $\Omega^{d-l}X$. On définit par récurrence sur $l \leq d$ l'élément $\alpha_{k,l-1} \in \bar{\mathrm{H}}^*X_{l-1}$ comme la désuspension de l'image de $\alpha_{k,l}$ par l'application $\bar{\mathrm{H}}^*X_l \to \bar{\mathrm{H}}^*\Sigma\Omega X_l \simeq \Sigma\bar{\mathrm{H}}^*X_{l-1}$.

On vérifie ensuite par récurrence descendante sur $l \leq d$ les cinq points suivants :

(Notons, pour tout module instable M, M_s le sous-module formé des éléments s-nilpotents et R_sM le module instable $\Sigma^{-s}(M_s/M_{s-1})$.)

(0) $\bar{\mathrm{H}}^*X_l$ est l-nilpotent.

(0') $\bar{\mathrm{H}}^*X_l/(\bar{\mathrm{H}}^*X_l)_{2l}$ est dans $\mathcal{U}_1$.

(1) $\mathrm{Sq}_l\alpha_{k,l} = \alpha_{k+1,l}$.

(2) $\alpha_{k,l}$ est exactement l nilpotent.

(3) $\alpha_{k,l}^2$ est nul pour k assez grand.

Pour $l = 0$ les points (2) et (3) sont contradictoires.

Le point (1) est vrai par construction. Le point (0') pour $l = d$ est vrai par hypothèse sur $X = X_d$. Le point (3) pour $l = d$ vient de ce qu'on s'est ramené à une structure produit triviale sur $\bar{\mathrm{H}}^*X$. Le point (2) pour $l = d$ est conséquence du point (0) et de ce que $(\mathrm{Sq}_d)^c\alpha_{k,d}$, $c \in \mathbb{N}$, n'est jamais nul car d'image non nulle dans $\mathrm{F}(1) \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$.

Commençons par démontrer le point (0) pour $l = d$: Le noyau du morphisme $\bar{\mathrm{H}}^*X \to \mathrm{F}(1) \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ est dans $\mathcal{U}_0$ et $d-1$-connexe donc est d nilpotent. De même $\bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$ est d-nilpotent donc également $\mathrm{F}(1) \otimes \bar{\mathrm{T}}\bar{\mathrm{H}}^*X$, donc également l'image de l'application $\bar{\mathrm{H}}^*X \to \mathrm{F}(1) \otimes \bar{\mathrm{H}}^*X$. On conclut à l'aide du point (ii) de la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte dans $\mathcal{U}$ alors :*

(i) Pour tout entier s la suite $0 \to \mathrm{R}_s A \to \mathrm{R}_s B \to \mathrm{R}_s C$ est exacte modulo $\mathcal{N}il$.

(ii) Supposons que A est dans $\mathcal{N}il_k$ pour un certain entier k, alors l'application $\mathrm{R}_s B \to \mathrm{R}_s C$ est surjective pour tout $s < k$.

Pour démontrer les points (0), (0'), (2) et (3) pour $l-1$ sachant qu'ils sont vrais pour l on utilise la suite spectrale d'Eilenberg Moore reliant la cohomologie modulo 2 de X_{l-1} à celle de ΩX_l : $\bar{\mathrm{H}}^*\Omega X_l$ possède une filtration croissante convergeante par des sous-modules instables $0 = \mathrm{F}_0 \subset \mathrm{F}_{-1} \subset \mathrm{F}_{-2} \subset \ldots$. La suspension s-ième du quotient $\mathrm{F}_{-s}/\mathrm{F}_{-s+1}$ s'identifie au terme $\mathrm{E}_\infty^{-s,*}$.
Le terme $\mathrm{E}_1^{-s,*}$ s'identifie au module $\bar{\mathrm{H}}^* X_l^{\otimes s}$ donc est sl nilpotent. Les différentielles d_r sont des morphismes de modules instables $\mathrm{E}_r^{-s,*} \to \Sigma^{r-1}\mathrm{E}_r^{-s+r,*}$.

On obtient d'abord le point (0) : chaque module $\mathrm{F}_{-s}/\mathrm{F}_{-s+1}$ est $sl-s$ nilpotent. Le point (i) de la proposition et une récurrence sur s montrent que chaque F_{-s} est $l-1$-nilpotent, donc également $\mathrm{colim}_s \mathrm{F}_{-s} = \bar{\mathrm{H}}^*\Omega X_l$. Ce même argument montre plus généralement que le quotient $\bar{\mathrm{H}}^*\Omega X_l/\mathrm{F}_{-s}$ est $(s+1)(l-1)$-nilpotent. On en déduit avec le point (i) que l'application $\mathrm{R}_s\mathrm{F}_{-1} \to \mathrm{R}_s\bar{\mathrm{H}}^*\Omega X_l$ est injective et de conoyau nilpotent pour tout $s < 2(l-1)$.

Le noyau de l'épimorphisme $\bar{\mathrm{H}}^* X \to \mathrm{E}_\infty^{-1,*} \simeq \Sigma\mathrm{F}_{-1}$ est formé d'éléments $2l$-nilpotents, donc l'application $\mathrm{R}_s\bar{\mathrm{H}}^*X \to \mathrm{R}_s\Sigma\mathrm{F}_{-1} \simeq \mathrm{R}_{s-1}\mathrm{F}_{-1}$ est un isomorphisme pour tout $s < 2l$. En particulier $\mathrm{R}_s\mathrm{F}_{-1}$ est dans $\mathcal{U}_1$ pour tout $s < 2l-1$.

Le point (0') est maintenant conséquence de la proposition suivante :

Proposition 2. *Soient $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte dans $\mathcal{U}$ et p, q, s trois entiers positifs. On suppose que $\mathrm{R}_s A$ est dans $\mathcal{U}_p$ et que $\mathrm{R}_s C$ est dans $\mathcal{U}_q$, alors $\mathrm{R}_s B$ est dans $\mathcal{U}_{max(p,q)}$.*

Le point (2) est lui aussi conséquence de ce qui précède : on sait que $\alpha_{k,l-1}$ est $l-1$-nilpotent et que son image par Sq_{l-1} est l'élément $\alpha_{k+1,l-1}$. Il suffit donc de vérifier que ces classes ne sont jamais nulle. Or la suspension de $\alpha_{k,l-1}$ est l'image de $\alpha_{k,l}$ par l'épimorphisme $\bar{\mathrm{H}}^*X \to \Sigma\mathrm{F}_{-1}$, lequel induit un isomorphisme $\mathrm{R}_l\bar{\mathrm{H}}^*X \to \mathrm{R}_l\Sigma\mathrm{F}_{-1}$.

Pour obtenir le point (3) on a besoin également d'informations sur le module $\mathrm{R}_{2l-2}\mathrm{F}_{-2}$. On considère la suite exacte $0 \to \mathrm{F}_{-1} \to \mathrm{F}_{-2} \to \mathrm{F}_{-2}/\mathrm{F}_{-1} \to 0$. On sait déjà que $\mathrm{R}_{2l-2}\mathrm{F}_{-1}$ est dans $\mathcal{U}_1$.

Soit K le noyau du produit $(\bar{\mathrm{H}}^*X)^{\otimes 2} \to \bar{\mathrm{H}}^*X$. La surjection $K \to \mathrm{E}_\infty^{-2,*} \simeq \Sigma^2(\mathrm{F}_{-2}/\mathrm{F}_{-1})$ induit un isomorphisme $\mathrm{R}_{2l}K \to \mathrm{R}_{2l-2}(\mathrm{F}_{-2}/\mathrm{F}_{-1})$ puisque son noyau est formé d'éléments $3l$-nilpotents. Comme $\mathrm{R}_l\bar{\mathrm{H}}^*X_l$ est dans $\mathcal{U}_1$, $\mathrm{R}_{2l}K$ est dans $\mathcal{U}_2$. La seconde proposition montre alors que $\mathrm{R}_{2l-2}\mathrm{F}_{-2}$ est dans $\mathcal{U}_2$.

Revenons au point (3). La classe $\alpha_{k,l}$ est de carré nul pour k assez grand. L'élément $\alpha_{k,l} \otimes \alpha_{k,l} \in \mathrm{E}_1^{-2,*}$ détermine alors un élément du quotient $\mathrm{F}_{-2}/\mathrm{F}_{-1}$ dont on choisit un représentant $\omega_{k,l-1}$ dans F_{-2}. On vérifie alors les points suivants :

(a) $\mathrm{Sq}^{2^k}\omega_{k,l-1} = \alpha_{k+1,l-1}\alpha_{k,l-1}$ modulo $(\mathrm{F}_{-1})_{2l-1}$.

(b) $\mathrm{Sq}^{2^k}\mathrm{Sq}^{2^k}\omega_{k,l-1} = \alpha_{k,l-1}^2$ modulo $(\mathrm{F}_{-1})_{2l-1}$.

(c) $\omega_{k,l-1}$ est $2l-2$ nilpotent.

(d) $\mathrm{Sq}^{2^k}\mathrm{Sq}^{2^k}\omega_{k,l-1}$ est $2l-1$ nilpotent.

Les points (b) et (d) montrent que $\alpha_{k,l-1}^2$ est $2l-1$-nilpotent, donc que $(\mathrm{Sq}_{2l-2})^c(\alpha_{k,l-1}^2)$ est nul pour c assez grand. Or $\mathrm{Sq}_{2l-2}(\alpha_{k,l-1}^2) = \alpha_{k+1,l-1}^2$ par construction des $\alpha_{k,l}$, ce qui démontre le point (3).

Le point (a) vient de ce que la différence $\mathrm{Sq}^{2^k}\omega_{k,l-1} - \alpha_{k+1,l-1}\alpha_{k,l-1}$ vit dans F_{-1} et de ce que les modules $\mathrm{R}_s\mathrm{F}_{-1}$ sont réduits et dans $\mathcal{U}_1$ donc nuls en des degrés autres que 0 ou une puissance de 2 pour $s < 2l-1$. Le point (b) s'en déduit. Comme l'élément $\alpha_{k,l-1}$ est $l-1$ nilpotent, $\mathrm{Sq}^{2^k}\mathrm{Sq}^{2^k}\omega_{k,l-1}$ est $2l-2$-nilpotent.

Pour le point (c) on montre par récurrence sur $s \in \{0,\dots,2l-3\}$ que $\omega_{k,l-1}$ est $s+1$-nilpotent en utilisant le fait que $\mathrm{R}_s\mathrm{F}_{-2}$ est réduit et dans $\mathcal{U}_1$ donc nul en des degrés autres que 0 ou une puissance de 2.

On montre ensuite que $\mathrm{Sq}^{2^k}\mathrm{Sq}^{2^k}\omega_{k,l-1}$ est nul dans $\mathrm{R}_{2l-2}\mathrm{F}_{-2}$ comme dans [3, p. 545] par décomposition de l'opération $\mathrm{Sq}^{2^k}\mathrm{Sq}^{2^k}$ et en utilisant le fait que $\mathrm{R}_{2l-2}\mathrm{F}_{-2}$ est réduit et dans $\mathcal{U}_2$ donc nul en des degrés autres que 0 ou une somme de deux puissances de 2.

Références

[1] F.X. Dehon et G. Gaudens, Espaces profinis et problèmes de réalisabilité, preprint (2002).

[2] L. Schwartz, A propos de la conjecture de non réalisation due a N. Kuhn, *Invent. Math.*, **134** (1998), 211-227.

[3] L. Schwartz, La filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces, *Geometry and Topology*, **1** (2001), 519-548.

François-Xavier Dehon, Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire J.A. Dieudonné
dehon@math.unice.fr