

## Leçon 0 : Prix et couverture d'une option d'achat<sup>1</sup>

Dans cette première leçon, on explique comment on peut calculer le prix d'un contrat d'option en évaluant celui d'un portefeuille de couverture de cette option. On se place dans un cas très simple, celui d'une option d'achat sur un actif financier dont on a modélisé la dynamique au moyen d'un arbre binaire. Le taux d'intérêt monétaire est supposé constant pendant la durée du contrat.

**Définition :** Une *option* d'achat (européenne), *encore appelée call*, est un titre donnant droit à son détenteur d'acheter un actif financier à une date future et à un prix fixé. Il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Le prix fixé s'appelle le *prix d'exercice* de l'option et la date de fin du contrat la *date d'échéance* ou *date d'exercice*. L'actif financier sur lequel porte le contrat s'appelle l'*actif sous-jacent*.

Le propre d'un contrat d'option, tient à ce qu'à la date de souscription, la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent n'est pas connue mais le paiement que pourra exiger le détenteur de l'option, s'il exerce l'option, dépend de cette valeur à l'échéance. C'est pourquoi on appelle aussi les options des *contrats contingents*. On peut comprendre, dans un premier temps, un tel contrat comme un contrat d'assurance : le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré, ce dernier cherchant à se couvrir contre une envolée de la valeur du sous-jacent. Il s'agit alors d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une différence essentielle entre un contrat d'assurance classique (assurance habitation ou automobile) et un contrat d'option.

L'exemple le plus naturel d'actif financier est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première comme le prix d'une tonne de zing ou celui d'un produit agricole tel le prix de 50.000 livres de boeuf. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricoles déjà courants au siècle dernier. Les contrats d'option sur actions se sont vraiment développés lorsqu'ils ont pu faire l'objet d'une négociation en bourse, c'est-à-dire à partir des années 70 sur le CBOT, à Chicago, puis progressivement dans la plupart des autres places financières.

## 1 Evaluation du prix dans un modèle à une étape

Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple. Notons  $t = 0$  l'instant de souscription de l'option,  $t = T$  son échéance et  $K$  son prix d'exercice. Supposons que l'actif sous-jacent ait la valeur  $S_0$  à l'instant initial et qu'il ne puisse prendre que deux valeurs  $S_T = S_0u$  ou  $S_T = S_0d$  à l'échéance, avec  $0 < d < 1 < u$ . On verra qu'il est naturel de supposer en outre que  $S_0d < K < S_0u$ . Soit  $C_0$  la valeur, à déterminer, du call à l'instant  $t = 0$ ; c'est le prix du contrat, ou la *prime*. A l'instant initial le vendeur ne sait pas si  $S_T$  prendra la valeur  $S_0u$  ou  $S_0d$ , mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si  $S_T = S_0d$ , l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à  $K$ ) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si  $S_T = S_0u$ , l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu  $K$ , soit  $S_0u - K$ , somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix. Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ? L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé *portefeuille de couverture*  $\Pi$ , composé de  $a$  actifs  $S_0$  et de  $b$  unités monétaires, et de choisir sa composition  $a$  et  $b$  de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option, c'est-à-dire 0 si  $S_T = S_0d$  et  $S_0u - K$  si  $S_T = S_0u$ . Si l'on désigne par  $r$  le taux d'intérêt monétaire, la *composition du portefeuille*  $(a, b)$  devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} aS_0u + be^{rT} &= S_0u - K \\ aS_0d + be^{rT} &= 0 \end{cases} \quad (1)$$

On résout facilement ce système (système linéaire de deux équations à deux inconnues  $a$  et  $b$ ) et on déduit des valeurs de  $a$  et  $b$  obtenues la valeur du portefeuille à l'instant initial  $\Pi_0 = aS_0 + b$ . On peut alors donner à  $C_0$  la valeur  $C_0 = \Pi_0$ .

---

<sup>1</sup>Ce cours a été traité dans le cours de Probabilité, en guise de motivation de la notion de probabilité déconnectée de l'idée de "chance" qu'un évènement se réalise ou non.

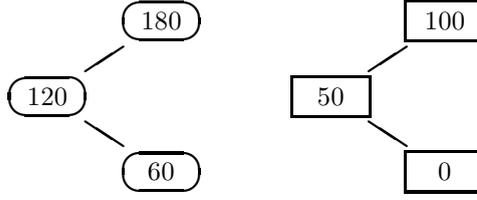


FIG. 1 – Un exemple de modèle à une étape

**Exemple :** Par exemple, si  $S_0 = 120$ ,  $u = 1,5$ ,  $d = 0,5$ ,  $r = 0$ , et  $K = 80$ , la résolution du système (1) donne  $a = \frac{5}{6}$ ,  $b = -50$  et donc  $\Pi_0 = 50$ . Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à  $C_0 = 50$ , le vendeur emprunte 50 (car  $b = -50$ ) et achète  $a = \frac{5}{6}$  de  $S_0$  (au prix 100); à l'échéance, son portefeuille vaudra soit  $150 = \frac{5}{6}180$ , si  $S_T = S_0u$ , et il paiera alors  $100 = 180 - 80$  au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans intérêts puisqu'on a supposé  $r = 0$ ), soit il vaudra  $50 = \frac{5}{6}60$ , si  $S_T = S_0d$ , ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

**Remarque :** Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système (1) admette une solution, ce qui est assuré dès que  $u \neq d$ , ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à  $t = T$ , il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option !

**Remarque :** Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option; par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix  $K$  (au lieu du droit d'acheter), appelé un *put*, sa valeur à l'échéance sera  $K - S_0d$  si  $S_T = S_0d$  et 0 si  $S_T = S_0u$ . Plus généralement, si l'on désigne par  $C_T = \varphi(S_T)$  le prix du contrat d'option à l'instant  $T$ , la résolution du système (1) dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donnée par

$$a = \frac{\varphi(S_0u) - \varphi(S_0d)}{S_0u - S_0d} \quad (2)$$

Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de *delta de couverture* (ou simplement *delta*). Il désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir l'option.

## 2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique.

La seule idée du portefeuille de couverture  $(a, b)$  constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois). Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre  $t = 0$  et  $t = T$ ) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur  $S_t$  du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.

Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent :  $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$  et  $(S_t)$  prenant la valeur  $S_0$  à l'instant initial, l'une des deux valeurs  $S_{\delta t} = S_0d$  ou  $S_{\delta t} = S_0u$  à l'instant intermédiaire  $t = \delta t$  et l'une des trois valeurs  $S_T = S_0d^2$ ,  $S_T = S_0ud$  ou  $S_T = S_0u^2$  à l'échéance. Pour déterminer la valeur d'un portefeuille de couverture d'une option  $C_T = \varphi(S_T)$ , raisonnons en partant de sa valeur  $\Pi_T$  à l'échéance, qui est connue puisque, pour couvrir l'option il devra valoir  $\Pi_T = \varphi(S_T)$ , somme due en  $t = T$  par le vendeur à l'acheteur de l'option. Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par  $S_T$ . En utilisant la même méthode que dans le cas d'un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs  $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$  que devra prendre le portefeuille à l'instant  $t = \delta t$ , selon que  $S_{\delta t} = S_0d$  ou  $S_{\delta t} = S_0u$ . Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes

$$\begin{cases} aS_0u^2 + be^{r\delta t} &= \varphi(S_0u^2) \\ aS_0ud + be^{r\delta t} &= \varphi(S_0ud) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} aS_0ud + be^{r\delta t} &= \varphi(S_0ud) \\ aS_0d^2 + be^{r\delta t} &= \varphi(S_0d^2) \end{cases} \quad (4)$$

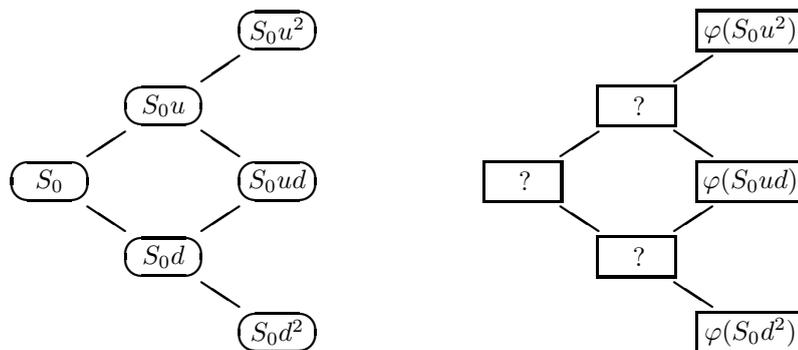


FIG. 2 – Quelles valeurs donner à l’option aux instants  $t = \delta t$  et  $t = 0$  ?

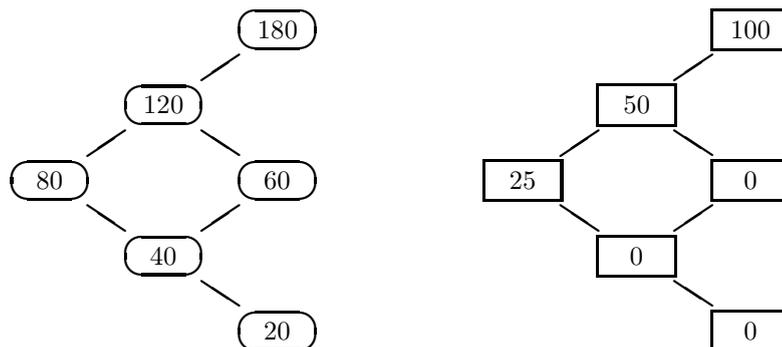


FIG. 3 – Deux pattes-d’oie : la première représente l’évolution sur deux étapes d’un actif à dynamique stochastique binaire, avec  $S_0 = 80$  et  $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$  ; la seconde celle du portefeuille de couverture d’un call sur cet actif de prix d’exercice  $K = 80$ .

Désignons par  $\Pi_{\delta t}^u$  et  $\Pi_{\delta t}^d$  les deux valeurs de  $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$  obtenues en remplaçant d’une part  $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$  par la solution du système (3) et  $S_{\delta t}$  par  $S_0u$  et d’autre part  $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$  par la solution du système (4) et  $S_{\delta t}$  par  $S_0d$ . Pour obtenir la valeur cherchée du portefeuille à l’instant initial, qui sera comme précédemment la valeur initiale de l’option (ou prime), il reste alors simplement à résoudre le système

$$\begin{cases} aS_0u + be^{r\delta t} = \Pi_{\delta t}^u \\ aS_0d + be^{r\delta t} = \Pi_{\delta t}^d \end{cases} \quad (5)$$

**Exemple :** Soit un titre valant  $S_0 = 80$  et changeant deux fois de prix avant l’échéance en  $T = 2\delta t$ . Observons que dans l’exemple précédent nous avions, à  $t = \delta t$ ,  $S_{\delta t} = S_0(1 + \frac{1}{2})$  ou  $S_{\delta t} = S_0(1 - \frac{1}{2})$ . Supposons qu’ici  $S$  suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \frac{1}{2}), \quad S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \frac{1}{2}).$$

Cela donne pour cet actif la dynamique indiquée figure 2 :

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \quad (6)$$

$$S_0 = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \quad (7)$$

$$S_0 = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \quad (8)$$

Soit une option call de date d’exercice  $T = 2\delta t$  et prix d’exercice  $K = 80$  (lorsque  $K = S_0$ , on dit que c’est une option “à la monnaie”). On suppose, pour simplifier, que le taux d’intérêt monétaire  $r$  est ici égal à 0.

Observons que si  $S_{\delta t} = 120$  nous retrouvons l’exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c’est-à-dire si  $S_{\delta t} = 120$ ), doit valoir

$$\Pi_{\delta t}^u = 50.$$

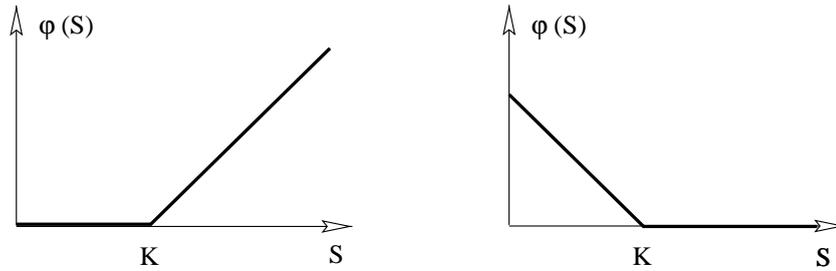


FIG. 4 – Fonction de paiement (ou pay-off) d'un call et d'un put : l'option call est l'option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d'échéance  $T$ , l'actif  $S$  à un prix maximal  $K$ . Si  $S_T \leq K$ , l'option aura donc une valeur nulle pour  $t = T$ . Si  $S_T > K$ , l'option vaudra  $S_T - K$  pour  $t = T$ , c'est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu  $K$  et le prix effectif  $S_T$  de l'actif à la date  $T$ . Pour une option call, on a donc  $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$ , où  $x^+$  vaut  $x$  si  $x > 0$  et 0 sinon. L'option put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date  $T$ , l'actif  $S$  au prix minimum  $K$ . En examinant successivement les cas  $S_T \geq K$  et  $S_T < K$ , il est facile de voir que  $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$ . Le nombre  $K$  s'appelle le *prix d'exercice* (ou *strike*) de l'option.

Qu'en est-il si  $S_{\delta t} = 40$ ? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilités à venir pour  $S_{2\delta t}$  sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d'exercice  $K = 80$ , on aura dans les deux cas  $\varphi(S_{2\delta t}) = 0$ , et donc  $a_{\delta t} = b_{\delta t} = \Pi_{\delta t} = 0$  puisqu'il n'y a plus rien à couvrir dans ce cas.

À l'instant  $t = 0$  le portefeuille de couverture  $(a_0, b_0)$  doit satisfaire  $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$ , c'est-à-dire vérifier le système

$$\begin{cases} a_0 120 + b_0 & = a_0 S_{0u} + b_0 = 50 \\ a_0 60 + b_0 & = a_0 S_{0d} + b_0 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

On trouve immédiatement  $a_0 = \frac{5}{8}$  et  $b_0 = -25$  d'où  $\Pi_0 = \frac{5}{8}80 - 25 = 25$ . Le vendeur de l'option, dont le prix est  $\Pi_0 = 25$ , touche cette prime à l'instant initial, y ajoute un montant de 25 qu'il emprunte, le tout servant à acheter  $\frac{5}{8}$  d'actifs à 80 pièce. Si, pour  $t = \delta t$ , l'actif sous-jacent a évolué à la baisse et que  $S_{\delta t} = 40$ , *on solde* le portefeuille; la part en actifs ne vaut plus que  $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8}40 = 25$ , soit exactement de quoi rembourser la dette  $b_0 = 25$ . Si, pour  $t = \delta t$ , l'actif sous-jacent a évolué à la hausse et que  $S_{\delta t} = 120$ , nous avons vu dans l'exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter  $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$ ; comme il y a déjà  $\frac{5}{8}$  d'actifs dans le portefeuille, il convient d'en *racheter*  $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$  au prix unitaire  $S_{\delta t} = 120$ , donc pour une valeur de  $\frac{10}{48}120 = 25$ , que l'on emprunte, ce qui porte la dette totale à  $25 + 25 = 50$ , comme dans le premier exemple, bien entendu. Le vendeur a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu'à l'échéance sa valeur soit exactement celle de l'option (100, 0, ou 0 selon les valeurs de  $S_{2\delta t}$ ) : c'est le principe de la couverture dynamique.