Leçon 2 : Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le marché financier que nous considérons est un marché financier très simple qui comporte 2 actifs, un *actif risqué* (par exemple une action ou un indice), dont la valeur est notée S_t sur lequel sera souscrit l'option, et un *actif non risqué* (par exemple un dépot d'argent sur un compte rémunéré), dont la valeur est notée B_t.

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein ont proposé en 1979[1]de modéliser l'évolution du prix d'un actif de la façon suivante :

- Pour une suite finie de n instants régulièrement répartis entre 0 et T, $\mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (supposé petit), la valeur $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné S_0 à l'instant $t = 0$, et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant $t \in \mathbb{T}\backslash\{n\delta t\}$ est S_t, alors sa valeur à l'instant $t + \delta t$ sera soit $S_t u$ soit $S_t d$, où u et d sont des constantes qu'on supposera telles que $0 < d < 1 < u$. Donc $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ évolue sur un *arbre binaire* qui, à tout instant $t = k\delta t \in \mathbb{T}$, présente $k + 1$ noeuds ou $k + 1$ valeurs possibles égales à :

$$S_t = S_{k\delta t} \in \{S_0 u^j d^{k-j}, j = 0, \ldots, k\}$$

  l'indice j représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = k\delta t$ (j est nombre de "up"), l'ordre des "up" et des "down" n'important pas. En pratique, on prend souvent pour u et d les valeurs $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$, où σ est une constante appelée la *volatilité*.
- Pour la même suite d'instants $\mathbb{T}$, l'actif non risqué vaut $B_0 = 1$ à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence $B_t = B_{t-\delta t} e^{r\delta t}$, soit $B_t = e^{rt}$, où r désigne le taux d'escompte monétaire qu'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période $[0, T]$.

1 Construction du portefeuille de couverture

On considère un *call européen*, souscrit sur l'actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$, d'échéance $T = n\delta t$ et de *prix d'exercice* K. Il s'agit donc du droit d'acheter l'actif S_t à la date T au prix K. La valeur de cette option à l'instant final (appelée sa fonction de paiement ou son pay-off) est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ = \mathrm{Max}\,(S_T - K, 0) \tag{1}$$

c'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut $S_0 u^j d^{n-j}$ à l'instant final, pour un certain $j \in \{0, \ldots, n\}$, le call vaudra $C_T = (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$ pour ce même j.

Pour calculer, à partir de ces données, le prix du call à l'instant initial nous allons reprendre l'idée développée dans le cas des modèles à une et deux étapes, qui consiste à prendre pour *prime de l'option* la valeur initiale d'un portefeuille qui couvre l'option, c'est-à-dire un portefeuille qui aura précisément pour valeur à l'instant final le paye off de l'option. Comme pour le modèle à une ou deux étapes, nous cherchons une relation de récurrence *rétrograde* ("backward") de manière à lier les inconnues Π_0, a_0, et b_0, prix initial et composition initiale du portefeuille de couverture Π_t, à la donnée de la fonction de paiement de l'option $(S_T - K)^+$. Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date t, lorsque le sous-jacent prend la valeur S_t, le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent S_t, et d'une certaine quantité de placement non-risqué B_t. Comme sa composition a été arrêtée à l'instant $t - \delta t$ (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que $S_{t-\delta t}$, et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date t, nous choisissons de la noter

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

[1]Ce modèle fait suite à un modèle introduit en 1971 indépendement par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrète revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux *Capital Asset Pricing Model* (1964). Nous montrerons dans une leçon ultérieure les liens entre les deux approches, discrete et continue. L'approche en temps continu présente des avantages de calcul indéniables une fois que l'on maîtrise ce calcul. Mais l'approche discrète exposée ici, au dela de ses vertus pédagogiques, est parfois plus à même de modéliser des situations subtiles pour lesquelles l'approche continue peut se révèler trop limitative.

Ce choix de notation est important. On a donc :

$$\delta\Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t) - (a_{t-\delta t}S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t}B_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t}\delta S_t + b_{t-\delta t}\delta B_t \qquad (2)$$

où δS_t et δB_t sont des notations pour les différences $S_t - S_{t-\delta t}$ et $B_t - B_{t-\delta t}$. On peut alors recomposer le portefeuille, ayant prit connaissance de la valeur atteinte par S_t, mais par construction le portefeuille devra être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date t devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, c'est-à-dire en vérifiant la relation :

$$a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t = \Pi_t = a_tS_t + b_tB_t \qquad (3)$$

Nous reviendrons sur cette *relation d'autofinancement.* On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par S la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant t, par Π ($\Pi := \Pi_t = a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t$) celle correspondante du portefeuille et par B celle de B_t. Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain" Su et Sd, d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons Π^u et Π^d, supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition (a, b) comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} aSu + be^{r\delta t}B &= \Pi^u \\ aSd + be^{r\delta t}B &= \Pi^d \end{aligned}$$

qui se résoud immédiatement en

$$a = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{Su - Sd} \text{ et } b = e^{-r\delta t}\frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{B(u-d)}. \qquad (4)$$

On pose alors $a_t = a$ et $b_t = b$ et on en déduit la valeur cherchée Π_t, par la formule $\Pi_t = a_tS_t + b_tB_t$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 1 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, toute option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est* duplicable*, c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

Preuve : On raisonne par récurence sur le nombre n d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape ; pour un modèle à n étapes, on remarque simplement que, comme S_t prend deux valeurs S_0u et S_0d à l'instant δt, ces deux valeurs sont chacunes les valeurs initiales d'un modèle à $n-1$ étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles de couverture $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ avec lesquels on peut alors calculer Π_0 (et donc C_0) comme dans un modèle à une étape. □

2 Probabilité risque neutre et formule fondamentale

Le calcul évoqué, bien que simple dans son principe, est lourd dans sa mise en oeuvre (résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations) ? Nous allons voir à présent comment on peut le simplifier grâce à l'introduction d'un formalisme probabiliste.

La remarque cruciale est la suivante : si l'on calcule la valeur du portefeuille $\Pi = aS + bB$ en utilisant les solutions (a, b) trouvées en (4), on voit facilement qu'on peut réécrire Π comme une fonction de Π^u et Π^d, sous la forme

$$\Pi = e^{-r\delta t}(p\Pi^u + q\Pi^d), \qquad (5)$$

si l'on introduit les quantités

$$p := \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \text{ et } q := \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}. \qquad (6)$$

Or il est facile de vérifier que ces quantités sont telles que $p + q = 1$ et que, si l'on suppose, ce que nous ferons désormais, que $0 < d < e^{r\delta t} < u$, ces quantités p et q vérifient aussi $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Donc si l'on considère que Π^u et Π^d sont les deux valeurs que peut prendre une v.a. de Bernouilli Π avec $P(\Pi = \Pi^u) = p$ et $P(\Pi = \Pi^d) = q$ alors l'équation (5) affirme simplement que Π est précisement le produit par le *facteur d'actualisation*, $e^{-r\delta t}$, de l'espérance de cette v.a., c'est-à-dire *l'espérance actualisée* de cette v.a.. Les valeurs p et q ainsi définies se calculent directement en fonction de u, d et r, donc à partir des données du modèle choisi $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Mais elles ont aussi une autre propriété essentielle : on a en effet

$$S = e^{-r\delta t}(pSu + qSd), \qquad (7)$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$S_{t-\delta t} = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_t \text{ connaissant } S_{t-\delta t}).$$

On appelle *probabilité risque-neutre* la probabilité $(p, q = 1-p)$ donnée par (6) et c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options, directement et sans recourir à la résolution d'un grand nombre de petits systèmes linéaires. On la désigne aussi sous le nom de *probabilité de calcul*, ou encore *probabilité de martingale* pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons.

La probabilité risque-neutre permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent (S_t) d'une structure de *marche aléatoire*, c'est-à-dire que, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, les $k+1$ valeurs $\{S_0 u^j d^{k-j}, j = 0, \ldots, k\}$ que peut prendre S_t sont les $k+1$ valeurs possibles d'une v.a. dont la loi est donnée par :

$$P(S_t = sS_0 u^j d^{k-j}) = \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{k-j}. \tag{8}$$

En effet la valeur $S_0 u^j d^{k-j}$ atteinte par S_t correspond à une trajectoire qui présente j "montées" et $k-j$ "descentes" dont la probabilité est $p^j(1-p)^{k-j}$ si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements, à la hausse ou à la baisse, sont indépendants, et il est facile de voir qu'il y a exactement $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}$ trajectoires qui atteignent cette valeur. La formule (8) explique le nom de modèle binomial que l'on donne souvent au modèle Cox-Ross-Rubinstein. On a la proposition suivante que l'on obtient par un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition précédente, en utilisant la relation de récurrence retrograde (5) et (6), ainsi que les propriétés des coefficients du binôme :

Proposition 2 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est donnée par*

$$e^{-rT}\mathbb{E}(\varphi(S_T)) = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j}\varphi(S_0 u^j d^{n-j}) \tag{9}$$

c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement ; ainsi, pour une option call, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (S-K)^+$, on a

$$C_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j}(S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$$

et pour le cas d'un put, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (K-S)^+$, on a

$$P_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j}(K - S_0 u^j d^{n-j})^+.$$

La formule (9) s'appelle la *formule fondamentale* pour l'évaluation du prix d'une option européenne dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Notons que, si la formule fondamentale donne immédiatement le prix de l'option, elle ne donne pas directement la composition du portefeuille de couverture.

Exemple : Si l'on revient à l'exemple de modèle à deux étapes donné à la leçon précédente, le calcul de la prime C_0 peut se faire à présent simplement : on détermine la probabilité de calcul définie par la relation $S = pSu + (1-p)Sd$ (on a supposé $r = 0$) ; on obtient $p = \frac{1}{2} = 1-p$; puis on calcule C_0 comme l'espérance $C_0 = 100P(S_T = 180) + 0P(S_T = 60) + 0P(S_T = 20) = 100(\frac{1}{4}) = 25$.

Corollaire 3 *Considérons un call et un put souscrits sur le même actif sous-jacent S_t, de même date d'échéance T et même prix d'exercice K. On a la* relation de parité call-put *suivante :*

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-r(T)}.$$

Preuve :

On applique la formule fondamentale (9) qui donne les valeurs de C_0 et P_0, la relation (qui est vraie (et facile à vérifier) pour tout $x \in \mathbb{R}$) $(x-K)^+ - (K-x)^+ = x - K$ et la propriété suivante de S_t dite *de martingale* :

$$S_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j}(S_0 u^j d^{n-j})$$

qui peut se montrer par récurrence en utilisant (7). □