Leçon 9 : Le théorème de Perron-Frobenius

Nous avons déjà rencontré la notion de *distribution stationnaire d'une chaine de Markov* qui est une répartition du système entre ses divers états ayant la propriété de rester inchangée au cours du temps. Plus précisément, si les proportions des différents états à l'instant initial sont celles d'une distribution stationnaire, alors ces proportions ne sont plus modifiées ultérieurement par la dynamique de la chaîne de Markov.

Dans cette leçon nous allons d'abord observer l'existence d'un tel équilibre sur un exemple puis indiquer comment on peut s'assurer de l'existence d'une telle distribution stationnaire vers laquelle évolue la chaîne de Markov et comment la calculer.

1 Etat stationnaire du modèle de Tedeschi

Considérons la dynamique suivante qui modélise l'évolution des proportions de *bénéficiaires* (B) et de *demandeurs* (D) dans une population d'individus susceptibles de bénéficier d'une activité de micro crédit, $S, \mathbb{P}$ où $S = \{B, D\}$ et

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} B & D \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix} & \begin{array}{c} B \\ D \end{array} \end{array}$$

La recherche d'un vecteur propre à gauche $\pi*$ de valeur propre 1 (solution de $\pi\mathbb{P} = \pi$) donne facilement le vecteur $(\gamma, 1-\alpha)$ (ou tout autre multiple de ce vecteur) mais ce dernier n'est pas une distribution stationnaire, sauf si $\gamma + 1 - \alpha = 1$. Il convient donc de diviser ses deux composantes par la quantité $\gamma + 1 - \alpha$ pour obtenir la distribution stationnaire $\pi*$ recherchée. Par exemple si la probabilité de réussite des bénéficiaires est de 75% et la chance d'obtenir un prêt pour le demandeur de 50%, c'est-à-dire si $\alpha = 0.75$ et $\gamma = 0.5$, alors on trouve $\pi* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. A présent, si l'on observe ce qui se passe si l'on part d'une distribution initiale π_0 différente de la distribution stationnaire, les itérés successifs π_0, $\pi_1 = \pi_0\mathbb{P}$, $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P} = \pi_0\mathbb{P}^2$, ... (que l'on peut facilement calculer avec Scilab par exemple), on peut voir que, lorsque k augmente, la distribution $\pi_0\mathbb{P}^k$ se stabilise peu à peu et converge vers $\pi*$. Par exemple s'il y a au départ 30% de bénéficiaires pour 70% de demandeurs, $\pi_0 = (0.3, 0.7)$, on obtient $\pi_1 = (0.575, 0.425)$, $\pi_2 = (0.644, 0.356)$, $\pi_3 = (0.661, 0.339)$, et $\pi_4 = (0.665, 0.335)$, etc...Cela signifie, dans cet exemple, que quelque soit la répartition initiale des bénéficiaires et des demandeurs, l'activité va faire évoluer très vite cette proportion vers l'équilibre $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Cette répartition limite dépend des deux probabilités α et γ et on peut vérifier facilement que la proportion de bénéficiaires est d'autant plus grande que ces deux paramètres sont grands. Pour l'IMF, augmenter α peut consister à n'accorder de prêt que lorsqu'elle peut s'assurer que le projet à financer a de très bonnes chances de réussir mais cela se fera alors probablement au détriment de γ car il lui faudrait alors rejeter une plus grande proportion de demandes.

A noter enfin que, si l'on calcule une puissance grande de la matrice $\mathbb{P}$, par exemple $\mathbb{P}^{50}$, on trouve

$$\mathbb{P}^{50} = \begin{pmatrix} 0,666667 & 0,333333 \\ 0,666667 & 0,333333 \end{pmatrix}.$$

Les deux lignes de la matrices sont (presque) identiques et (presque) égales à la distribution stationnaire $\pi*$. On peut le comprendre de la façon suivante. Si l'on a bien, comme nous le verrons ci-dessous, $\lim_{k\to+\infty} \pi_0\mathbb{P}^k = \pi*$ pour n'importe quelle distribution initiale π_0, le $k$ième itéré de π_0, π_k, est proche de $\pi*$ dès que k est suffisamment grand. Comme $\pi_k = \pi_0\mathbb{P}^k \simeq \pi*$, si la matrice $\mathbb{P}^k$ a ses deux lignes égales à L, alors on vérifie facilement que $\pi_0\mathbb{P}^k = L$ et donc que $L \simeq \pi*$. Comme L est de plus un vecteur dont la somme des coefficients vaut 1 (comme ligne d'une matrice stochastique), cette propriété fait de L un bonne approximation de la distribution stationnaire que l'on recherche, c'est-à-dire la distribution d'équilibre vers laquelle le système évolue. En pratique, les lignes de $\mathbb{P}^{40}$ ne sont pas, en général, exactement identiques, donc L n'est en réalité qu'une approximation de la répartition d'équilibre.

2 La théorie de Perron-Frobenius

Cette théorie mathématique qui porte le nom de ses deux inventeurs allemands, Ferdinand Georg Frobenius (1949-1917) et Oskar Perron (1880-1975), concerne les matrice positives dont l'une des puissances est strictement positive. Ces matrices s'appellent des matrices *primitives.*

Définition : On dit qu'une matrice carrée M est *positive* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et *strictement positive* si elle est positive et n'a aucun coefficient nul. Une matrice positive M est dite *primitive* s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que M^k est strictement positive.

Théorème 1 *Toute matrice stochastique M qui est primitive possède un unique vecteur propre stochastique strictement positif, $\pi*$, de valeur propre 1 qu'on appelle* vecteur propre dominant de Perron-Frobenius[1] *et, pour tout vecteur π_0 stochastique, on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \pi_0 M^k = \pi * .$$

Appliqué au cas d'une chaîne de Markov, ce résultat assure que si la matrice de transition de la chaîne est primitive, alors, quelque soit la distribution initiale π_0 du système, la répartition des états va évoluer, sous l'action de la dynamique de la chaîne de Markov, vers une distribution stationnaire $\pi*$ qui constitue un équilibre pour le système.

En fait, la théorie de Perron-Frobenius ne s'applique pas uniquement aux matrices stochastiques, mais plus généralement à toutes les matrice positives (pourvu qu'elles soient *irréductibles*, ce qui est une propriété un peu plus générale que celle d'être primitive.

L'une des difficultés de son application est la vérification de son hypothèse principale, la propriété pour la matrice d'être primitive. En effet, si l'on trouve, en calculant des puissances de la matrice, l'une d'entre elles qui est strictement positive, on saura que la matrice est primitive. Mais lorsque toutes les puissances calculées comportent des coefficients nuls, on ne sait pas alors si la matrice est primitive ou non Une *recette* peut cependant être utile :
Une matrice $\mathbb{P}$ de taille $n \times n$ est primitive si et seulement si $\mathbb{P}^{n^2-2n+2} > 0$.

En pratique, si l'on veut déterminer l'évolution future d'un système modélisé par une chaîne de Markov, on procèdera de la façon suivante :

1. Etablir (si c'est bien le cas) que la matrice de transition est une matrice primitive.
2. A l'aide d'un logiciel de calcul scientifique (par exemple Scilab), calculer une puissance grande de la matrice de transition, par exemple $\mathbb{P}^{40}$ ou $\mathbb{P}^{100}$.
3. Cette puissance ayant toutes ses lignes (presque) égales, cette ligne est la distribution stationnaire recherchée.
4. La théorie de Perron-Frobenius permet alors d'affirmer que la dynamique considérée fait évoluer le système, quelque soit la distribution initiale, vers l'équilibre donné par ce vecteur propre.

Remarque : Pour donner l'intuition de ce qui se passe pour la dynamique d'une chaine de Markov lorsque sa matrice de transition n'est pas primitive, on peut envisager le cas d'une chaîne *périodique.* C'est le cas d'une chaîne ayant une matrice de transition dont l'une des puissances $\mathbb{P}^k$, $k = 2, 3, \ldots$, vérifie $\mathbb{P}^k = \mathbb{P}$. Par exemple on pourra vérifier que pour

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}$; cette chaîne est dite *périodique de période* 3 car toute trajectoire revient à son état initial après 3 étapes. Il ne peut donc pas y avoir d'évolution vers un état stationnaire pour une telle chaine de Markov.

[1] Le *Pagerank* utilisé par le moteur de recherche Google est un exemple de vecteur propre dominant de Perron-Frobenius (voir `http ://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Perron-Frobenius`).