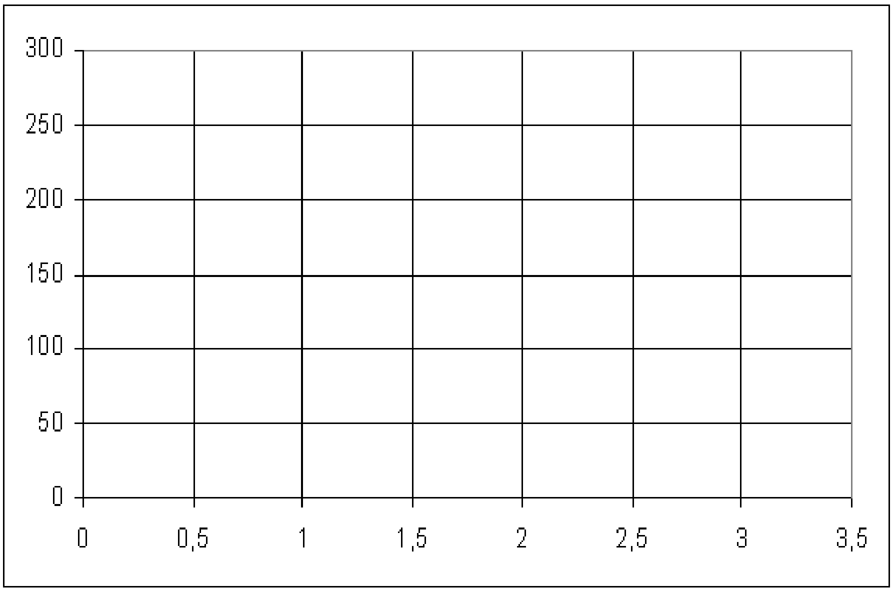
Université de Nice — L3 MASS, année 2010-2011
Département de Mathématiques — Calcul Stochastique et finance (semestre 2)
NOM : — Date : .
PRENOM : — Groupe : .

Feuille-réponses du TP 1
Les trajectoires d'un modèle CRR à n étapes

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant.

Charger Scilab puis ouvrir un éditeur en cliquant sur `Editeur` dans le menu en haut de fenêtre. Saisir successivement les parties du programme ci-dessous se rapportant à l'exercice concerné. A noter qu'on execute une partie du programme saisi en marquant cette partie et en tapant `Ctrl-Y` .

Exercice 1. : Calcul de la marche CRR On rappelle que la marche CRR S_t est définie par sa valeur initiale S_0 et la relation $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\texttt{up},\texttt{down}\}$. On choisit ici $up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et $down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, où σ est une constante (la volatilité de l'actif) et n le nombre d'étapes, $T = n\delta t$. Pour les calculer on range les valeurs de S_t dans une matrice triangulaire[1] $S(i,j) = SS(i+1, j+1)$, où $i = 0, \ldots, n$ est l'indice du pas de temps $t = i\delta t$ et $j = 0, \ldots, i$ le nombre de *up* intervenus avant t. Calculer au moyen de Scilab les valeurs de S_t dans un modèles à $n = 3$ étapes puis représenter sur le dessin suivant les 10 points de coordonnées $(i, S(i,j))$ pour $i = 0, \ldots, 3$ et $j = 0, \ldots, i)$ en les liant pour former l'arbre CRR de ce modèle. Attention au décallage d'une unité de i et j pour l'ordonnée $S(i,j) = SS(1+i, 1+j)$ de ces points !



Que vaut σ ?

[1] La numérotation des lignes et des colonnes par Scilab commence à 1 et non 0 !

Exercice 2. : Tracé d'une trajectoire Une trajectoire de la marche CRR est caractérisée par une suite de `up`, `down` que nous représenterons par une suite de 1 et de 0. On désigne par $J(i)$ la fonction qui donne pour une trajectoire le nombre de `up` entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = i\delta t$. Ainsi pour la trajectoire donnée par la suite $1, 1, 0, 0, 0, 1, 0$, $J(2) = J(5) = 2$ et $J(6) = 3$.

1. Modifier la valeur de n et saisir la suite/seconde partie du programme. Noter qu'il utilise l'instruction `xset("window",1)` qui choisit (et éventuellement crée) la fenêtre 1 comme fenêtre graphique courante (qu'on peut effacer au moyen de `clf(1)`). Il utilise aussi l'instruction `cumsum`. En vous aidant éventuellement de l'aide en ligne de Scilab, indiquer ce que fait cette instruction.

2. Faire tracer par `Scilab` plusieurs trajectoires en changeant la suite des 0 et 1. Quelles sont les valeurs atteinte par une trajectoire pour laquelle la succession des 0 et 1 est parfaitement régulière et alternée ? Expliquer le résultat que vous observez.

Exercice 3. : Simulation d'une suite aléatoire de 0 et de 1

1. La fonction `rand()` de Scilab (comme la touche `random` d'une calculette) renvoit un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Si l'on précise `rand(m,n)`, on obtient une matrice de taille $m \times n$ dont toutes les composantes sont des nombres aléatoires distribués selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais pour diverses (petites) valeurs de m et de n. La fonction `2*rand()-1` renvoit encore un nombre aléatoire, mais il n'est plus distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais puis déterminer quelle loi est simulée par cette fonction.

2. La suite des instructions suivantes permet de vérifier si la loi simulée est bien une loi uniforme : `x=rand(1,1000);histplot(12,x)` Expliquer ce que vous voyez sur la figure produite (dites en particulier ce que représente le "`12`") et ce que vous devriez voir si la loi était parfaitement uniforme.

3. En vous aidant éventuellement de l'aide en ligne de Scilab, indiquer ce que fait l'instruction `int`.

4. La fonction `int(0.5+rand())` renvoit encore un nombre aléatoire, mais il n'est plus distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais puis déterminer quelle loi est simulée par cette fonction. Quelle est la loi simulée ?

Exercice 4. : Simulation de M trajectoires de CRR

1. On souhaite à présent simuler un nombre M de trajectoires de la marche CRR. Que retourne, à votre avis, `int(p+rand(n,M))` (pour un $p \in]0,1[$ donné) ?

2. Et, si l'on pose `deltaJ=int(p+rand(n,M))`, que retourne `cumsum(deltaJ) ?`

3. On suppose $n = 100$. Simuler $M = 40$ trajectoires en choisissant $p = 0.5$. En reproduisant la simulation avec d'autres valeurs de la volatilité σ, étudier et expliquer l'influence de ce paramètre sur la forme des trajectoires.

Exercice 5. : Loi de la marche CRR à l'instant T. Représentez un histogramme des valeurs finales (on prendra par exemple $n = 200$) des trajectoires aléatoires de CRR ; pour cela, on simulera $M = 400$ trajectoires au moins et on prendra par exemple `int(sqrt(M))` pour nombre de classes. Indiquer l'allure de l'histogramme obtenu.

```
//Exercice 1 : Calcul de la marche de CRR /////////////
n=3 ;T=1 ;delta_t=T/n ;
SS=zeros(n+1,n+1);
S0=140 ;sigma=0.2 ;
up=exp(sigma*sqrt(delta_t)) ;down=1/up ;
SS(1,1)=S0 ;
for i=1 :n
SS(i+1,0+1)=SS(i,0+1)*down; // ici j=0
for j=1 :i
SS(i+1,j+1)=SS(i,j)*up;
end ;
end ;
// Exercice 2 : Tracé d'une trajectoire de CRR ; ici on choisit n=10 ;
deltaJ=[1 1 0 0 0 1 0 0 1 1] ;
J=cumsum(deltaJ);
ttraj=zeros(1,n+1);
ttraj(1)=SS(1,1);
for i=1 :n
ttraj(i+1)=SS(i+1,J(i)+1);
end ;
xset("window",1);
plot2d(0 :10,ttraj);
// Exercice 3 : Simulation d'une suite de 0 et de 1 ////////////////////////
rand();
rand(3,2);
rand(3,3);
2*rand()-1 ;
x=rand(1,1000);
xset("window",2);
histplot(12,x);
int(0.5+rand(1,10));
// Exercice 4 : Simulations de M trajectoires de CRR /////////////////
M=100 ; n=100 ;
MdeltaJ=int(0.5+rand(M,n));
MJ=cumsum(MdeltaJ,"c");
Mttraj=zeros(M,n+1);
for m=1 :M
Mttraj(m,1)=S0;
for i=1 :n
Mttraj(m,i+1)=SS(i+1,MJ(m,i)+1);
end ;
end ;
xset("window",3);
for m=1 :M
plot2d(0 :n,Mttraj(m,1 :n+1));
end ;
// Exercice 5 : Loi de la marche CRR l'instant T ; ici on choisira M=400 ;
xset("window",4);
histplot(int(sqrt(M)),Mttraj(1 :M,n+1));
```