

Calcul Stochastique et applications à la finance
Feuille-réponses du TP 3
Prix d'une option comme espérance conditionnelle du payoff

L'objet de cette séance est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call de payoff $\varphi(S) = (S - K)^+$ non plus au moyen d'une récurrence rétrograde mais comme une espérance du payoff actualisé.

Comme précédemment, on modélise les prix par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S_0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\text{up}, \text{down}\}$. On introduit comme dans le TP1 la notation $SS(i, j) = SS(i+1, j+1)$ pour représenter la valeur de l'actif S_t à l'instant $t = i\delta t$ s'il y a eu j up depuis l'instant $t = 0$. On pose à nouveau

$$n = 100 \quad T = 1 \quad \delta t = T/n \quad \text{up} = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{down} = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \sigma = 0.4 \quad S_0 = 140 \quad r = 0.1 \quad R = e^{r\delta t}.$$

Exercice 1. : On veut calculer la prime $c(0,0)$ d'un Call à la monnaie sur l'actif S_t . On a vu que cette prime peut se calculer en utilisant la formule $c(0,0) = \mathbb{E}(\varphi(S(n, J))/R^n$, où J est une variable aléatoire qui suit une loi binômiale : $\mathbb{P}(\{J = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Que retournent les commandes suivantes :

`binomial(0.5,1)=`

`binomial(0.5,2)=`

`binomial(0.5,3)=`

2. De façon générale, consultez la doc en ligne pour déterminer ce que retourne la commande `binomial(p,n)` ; expliquez :

3. Qu'observez-vous en calculant `binomial(0.5,3)` ? (Notez bien le ' final)

4. En utilisant le programme du TP1, recalculer les valeurs de de SS pour $i \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{0, \dots, i\}$. Préciser à quoi correspond le vecteur `SS(1+n,1+0 : 1+n)` .

5. Introduire la fonction de payoff Φ comme au TP2. Préciser à quoi correspond $\Phi(SS(1+n, 1+0 : 1+n))$ puis le produit $\Phi(SS(1+n, 1+0 : 1+n)) * \text{binomial}(p, n)$. En déduire la valeur de la prime du Call à la monnaie et la comparer avec la valeur de $CC(1, 1)$ obtenue au TP2.

Exercice 2. : Le code suivant permet de calculer le prix d'un Call $C(i, j)$ à la monnaie à un instant $t \in \{0, \delta t, 2\delta t, \dots\}$ quelconque et non plus seulement en $t = 0$. Expliquez pourquoi (on pourra dessiner les points de l'arbre CRR atteint à l'instant $T = n\delta t$ à partir d'un point (i, j) quelconque) puis calculer quelques valeurs de C .

```

C=zeros(n+1,n+1)
C(1+n, :)=Phi(SS(1+n, :));
for i=0 :n-1
    for j=0 :i
        C(1+i,1+j)=(Phi(SS(1+n,1+j :1+j+n-i))*binomial(p,n-i))/R^(n-i)
    end;
end;

```

Exercice 3. : On se propose de tracer la courbe donnant la prime en fonction de la volatilité σ . Pour cela il faut reprendre le programme précédent donnant la prime C en remplaçant toutes les quantités dépendant de σ par des fonctions de σ . Par exemple au lieu de $up=\exp(\sigma/\sqrt{n})$; on devra poser

```

function up=up(sigma);
up=exp(sigma/sqrt(n));
endfunction;

```

et de même pour down, p, SS et C. Indiquer l'allure du graphe obtenu.
Reprendre les exercices 2 et 3 pour un Put.