Université de Nice — L3 MASS, année 2010-2011

Département de Mathématiques — Calcul Stochastique et finance (semestre 2)

NOM : — Date : .

PRENOM : — Groupe : .

Feuille-réponses du TD 4
Modèles pour le micro-crédit

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : Taux pratiqué pour le micro-crédit : exemple de Muhammad Yunus (Prix Nobel de la Paix 2006) : La banque Grameen prête aux plus démunis dans les conditions suivantes : pour un prêt de 1000 Bangladesh Taka (BDT) l'emprunteur rembourse chaque semaine durant 50 semaines la somme de 22 BDT.

1. Quelle est la somme totale remboursée ? Quel pourcentage de la somme prèté a-t-on remboursé en sus ?

2. On note r le "taux d'intérêt continu annuel" pratiqué, c'est-à-dire que pour 1 emprunté il faut rembourser e^{rT} après un temps T exprimé en année, et donc $e^{r\frac{k}{52}}$ après k semaines. On pose $q = e^{-\frac{r}{52}}$. A la date d'emprunt les 22 BDT payés en semaine k représente une part égale à $x_k := 22q^k$ BDT sur le montant total emprunté. Expliquer pourquoi.

3. Si les remboursements commencent après une semaine alors $1000 = 22\sum_{k=1}^{50} q^k$. Pourquoi ?

4. On rappelle que $(1 + x + \ldots + x^{n-1})(1 - x) = 1 - x^n$. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$

5. En déduire que $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$

6. Que savez-vous du problème de résoudre l'équation $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$

7. Voici la manière de trouver toutes les solutions, réelles on complexes, sous Scilab :
   ```
   q=poly(0,"q"); //q devient le polynome à une seule racine, 0.
   [sols]=roots(22*q^51-1022*q+1000);
   ```
   Que vaut la solution q de l'équation $22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$?

8. Quel est le taux r pratiqué par la banque Grameen ?

9. A ce taux, combien faudrait-il payer après un an (en une seule fois) pour 1000 BDT empruntés ?

10. Pour financer l'achat d'un ordinateur valant 1000 EUR, on vous propose de rembourser 30 EUR par mois durant 36 mois en commençant les remboursements après un mois. Poser $p = e^{-\frac{r}{12}}$. Donner l'équation satisfaite par p. Donner la valeur de p calculée au moyen de Scilab, puis répondre aux deux questions : quel est le taux continu r pratiqué ? A ce taux, combien faudrait-il payer au terme des 36 mois ?

Exercice 2. : Actualisation

On note toujours r le taux d'intérêt continu annuel. Du fait que 1 vaudra e^{rt} à la date t, une somme S_t à la date t vaut $S_t/e^{rt} = S_t e^{-rt}$ à la date 0 : on dit que $\tilde{S}_t := S_t e^{-rt}$ est la "valeur actualisée" de S_t. Calculer les valeurs `SStilde(i+1,j+1)`$= \tilde{S}(i,j) = \tilde{S}_t$ pour $t = i\delta t$ du modèle de Cox-Ross-Rubinstein du TD 1, pour $r = 20\%$, $T = 1$, et $n = 100$. Quelles valeurs extrémales (minimale et maximale) trouvez-vous pour $\tilde{S}_1$?