NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Calcul stochastique : feuille de réponses du TP 6
Etude de la convergence du prix CRR vers le prix BS

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab et y définir sucessivement les 5 quantités $\delta t = T/n$, $R = e^{r\delta t}$, $up = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, $down = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $p = (R-d)/u-d)$ comme 5 fonctions de n.

Combien trouvez-vous pour p lorsque $n = 10$, $n = 25$, $n = 100$?

- δt, R, up, down et p sont définies comme fonction de n avec la syntaxe suivante (par exemple pour δt) ou pour R :

```
function d=delta_t(n);
d=T/n;
endfunction;
```

```
function R=R(n)
R=exp(r*delta_t(n));
endfunction;
```

- On trouve $p(10) = 0,4881803$, $p(25) = 0,4925098$ et $p(100) = 0,4962512$

Remarque : on a vu en cours que $p(n) = \frac{1}{2} + \frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} + \sqrt{\frac{T}{n}}\varepsilon(\delta t)$

On a donc $\lim_{n\to\infty} p(n) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. : Expliquez ce que calcule le code Scilab suivant.

```
//La fonction S
function y=S(i,j,n);
y=S0.*(up(n)).^j.*(down(n)).^(i-j);
endfunction;
//La fonction C
function phi=phi(S);
phi=max(S-K,0);
endfunction;
function z=C(i,j,n);
z=(phi(S(n,j :(j+n-i),n))*binomial(p(n),n-i)')/R(n)^(n-i);
endfunction;
//Trace du Call en fonction de n
Nmax=250;CCall=zeros(Nmax);
for n=1 :Nmax, Call(n)=C(0,0,n); end;
plot2d(10 :Nmax,Call(10 :Nmax));
```

Explication du code :

← Calcul de la fonction $S = S_0\, u^j d^{n-j}$ qui donne le prix de l'actif sous jacent (en fonction de n car up et down dépendent de n)

Calcul du pay off d'un Call $\varphi(S) = (S-K)^+$

→ Calcul du prix du Call (de payoff phi) comme espérance conditionnelle du payoff actualisée. L'esperance conditionnelle est le produit scalaire des valeurs prises phi(S(n,j:j+n-i,n)) en i=n sachant qu'on est au point (i,j), par les probabilités de prendre ces valeurs binomial(p(n),n-i). L'actualisation est la division par $(R(n))^{n-i}$.

→ Tracé des valeurs du Call à l'instant t=0 (prime du Call : C(0,0,n)) pour toutes les valeurs de n comprises entre n=10 et n = Nmax=250

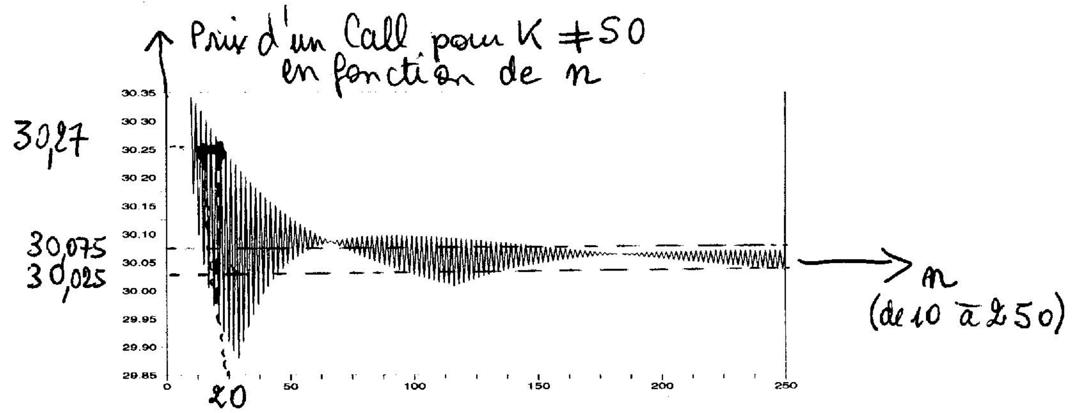
Exercice 3. : Ajouter le code précédent à votre code. L'utiliser pour calculer le prix du Call pour $K = 130$ lorsque $n = 20$. Quelle valeur trouvez-vous?

le code permet de calculer le prix du Call pour toute valeur de n.

Pour $n = 20$, on trouve $C(0,0,20) = 30,272811$.

Comme le dessin le montre, le prix varie avec n, par exemple, $C(0,0,50) = 30,129277$.

Les variations ~~semblent~~ cependant s'estomper lorsque n croît. Elles semblent rester dans l'intervalle $[30,025 ; 30,075]$ à partir de $n = 150$.

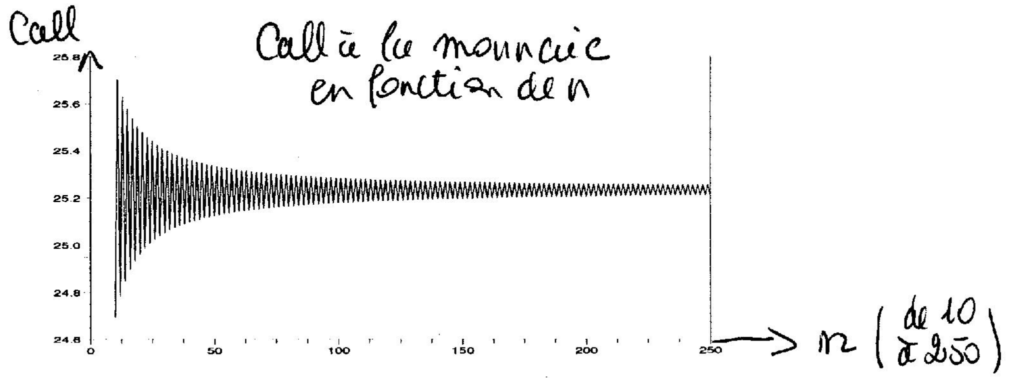


Que savez-vous des oscillations observées sur le graphique? Pensez-vous qu'elles convergent et si oui, que savez-vous de leur limite?

Nous savons que le prix Cox-Ross-Rubinstein tend, lorsque n tend vers l'infini, vers le prix Black-Scholes selon un théorème montré en cours.

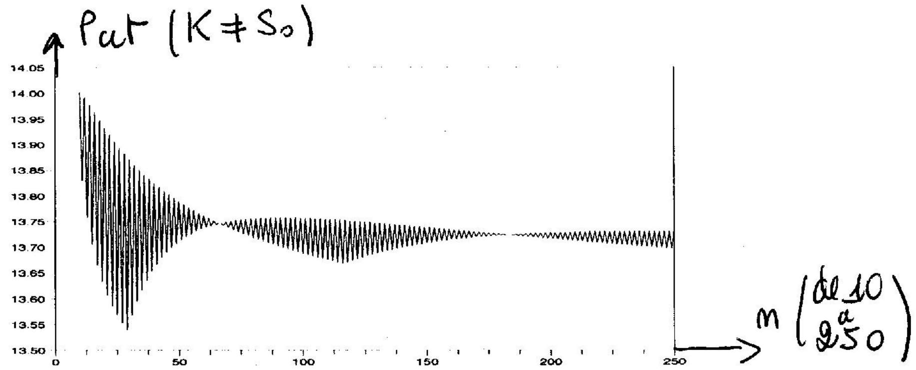
les oscillations que l'on observe sur le graphique ont donc une limite ; on peut penser qu'elle se situe dans l'intervalle $[30,025 ; 30,075]$ (sans en être absolument sûr !) donc approximativement égale à $30,05$.

Exercice 4. : Reprendre le dessin dans le cas d'un Call à la monnaie. Qu'observez-vous?



Dans le cas d'un Call à la monnaie, c'est-à-dire un Call dont le prix d'exercice K vaut S_0, le graphique montre des valeurs qui oscillent en fonction de n autour de la limite, en s'en rapprochant, les valeurs pour n pair croissant et les valeurs pour n impair décroissant vers cette limite.
Le prix est proche de 25,2 (pour n grand) donc moins cher que lorsque $K = 140$ (on avait 30,05) : Un call croît avec K.

Faire le tracé correspondant pour un Put d'abord avec $K = 130$ puis avec $K = 140$. Qu'observez



On change dans le code la définition du payoff phi en psi
Le dessin (ci-dessus dans le cas $K = 130$) est très semblable à celui obtenu pour un Call si ce n'est que la valeur limite est ici proche de 13,75 (au lieu de 30,05 pour le Call de mêmes caractéristiques).
Le cas où $K = 140$, (Put à la monnaie), donne un dessin semblable à celui de la question 4, sauf que la limite est proche de 18,4 cette fois (et non 25,2 pour le Call).

Exercice 5. : Montrer que si l'on pose $\mathrm{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(x)$ vérifie $\mathcal{N}(x) = (1 + \mathrm{erf}\,(x/\sqrt{2}))/2$.

Il s'agit de trouver comment exprimer $\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ qui est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à l'aide de "erf" qui est une fonction connue de Scilab.

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2}x} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} ds$$

$$t^2 = \frac{1}{2}s^2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} s \text{ et } dt = \frac{1}{\sqrt{2}} ds$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2}x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

Donc $\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$

Or

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{s^2}{2}} ds}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds}_{=\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$$

car la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est symétrique par rapport à 0.

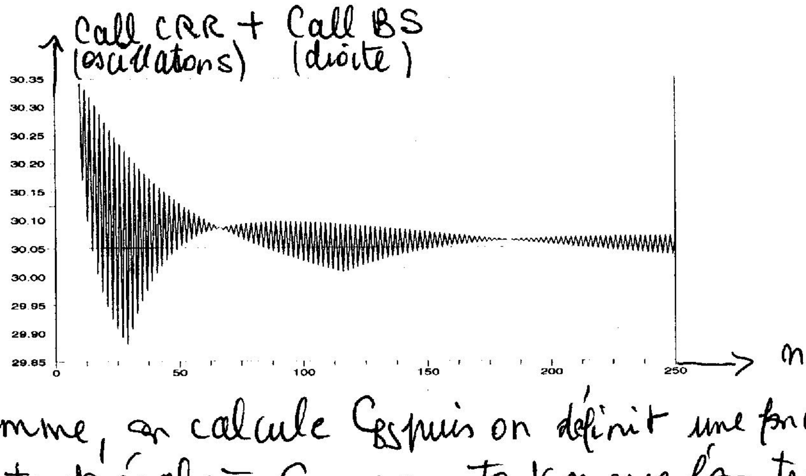
d'où $\boxed{\mathcal{N}(x) = \left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)/2}$.

Définir une fonction BlackScholes(S,K,r,T,σ) donnant la valeur du Call de prix d'exercice K à la date d'exercice T lorsque le taux (constant) vaut r et la volatilité est égale à σ, en utilisant la formule de Black et Scholes

$$C = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \quad \text{, avec } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \quad \text{et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

On pourra utiliser la fonction Scilab erf.

Ajouter une droite horizontale d'ordonnée C sur le dessins des oscillations des prix CRR. Qu'observez-vous?



Dans le programme, on calcule C_{BS} puis on définit une fonction $C_{BS}(n)$, qui est constante et égale à C_{BS} pour tout n, que l'on trace dans la même fenêtre que les prix CRR.