Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3 MASS, année 2010-2011
Calcul Stochastique et finance (semestre 2)
Date : .
Groupe : .

Feuille-réponses du TD 11
Modèle de Tedeschi sans période d'exclusion

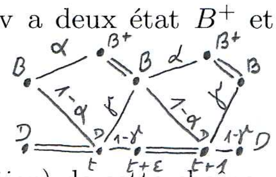
On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

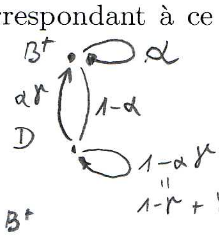
Exercice 1. : modèle simplifié de Tedeschi, sans exclusion

1.- On considère un modèle de Tedeschi simplifié, sans temps d'exclusion. La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et le renvoi dans le statut de demandeur. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire B. On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité $1-\alpha$ de ne pas rembourser son prêt : dans ce cas il redevient demandeur, a donc une probabilité $\alpha\gamma$ de redevenir bénéficiaire qui rembourse son prêt, on dit qu'il devient B^+. Sinon il devient demandeur (non bénéfiaire) et on le note D

1. Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov a deux état B^+ et D correspondant à ce modèle.

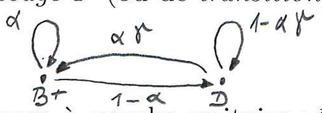
On avait, en développant dans le temps





2. Ecrire la matrice de *passage* P (ou de *transition*) de cette chaîne.

réecrivons le diagramme



d'où $P = \begin{array}{cc} B^+ & D \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \alpha\gamma & 1-\alpha\gamma \end{pmatrix} \begin{array}{c} B^+ \\ D \end{array}$

3. trouver son vecteur propre à gauche unitaire π^* associé à la valeur propre 1 : c'est une distribution d'équilibre de la chaîne. On sait que $\Pi^* = (x, y)$, avec $(x,y)P = (x,y)$, $x+y=1$

$\iff \begin{cases} (x \quad y)\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \alpha\gamma & (1-\alpha)\gamma \end{pmatrix} = (x \quad y) \\ x+y=1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha x + \alpha\gamma y = x \\ (1-\alpha)x + (1-\alpha)\gamma y = y \\ x+y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha x + \alpha\gamma(1-x) = x \\ y = 1-x \end{cases}$ d'où $(x,y) = \dfrac{1}{1-\alpha(1-\gamma)}(\alpha\gamma, 1-\alpha)$

4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales, P^n tend vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à π^*. Application numérique : choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.50$; calculer π^* et P^{50}.

alpha = 0.90;
gamma = 0.50;

P = [alpha, 1-alpha; ..
alpha*gamma, 1-alpha*gamma]

P^50 = $\begin{pmatrix} 0,8181.. & 0,1818.. \\ 0,8181.. & 0,1818.. \end{pmatrix}$

5. Recommencer avec $\alpha = 0.97$ et $\gamma = 0.10$. Qu'observez-vous ?. Calculer P^{500} ; qu'observez-vous ?

P^50 = $\begin{pmatrix} 0,7640.. & 0,2359.. \\ 0,7629.. & 0,2370 \end{pmatrix}$ les deux lignes diffèrent encore ; on remplace 50 par 500

P^500 = $\begin{pmatrix} 0,7637765 & 0,236.. \\ 0,7637765 & 0,236.. \end{pmatrix}$ lignes identiques.

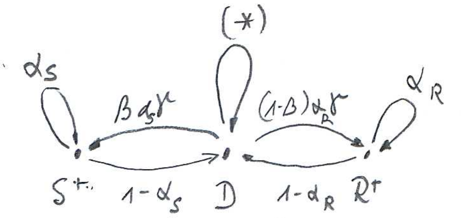
6. On revient au cas général α, γ. Rappelons que $X_t \in \{B+, D\}$ et $X_{t+\varepsilon} \in \{B, D\}$, et donc que $\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = B) = \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = B | X_t = B^+)\mathbb{P}(X_t = B^+) + \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = B | X_t = D)\mathbb{P}(X_t = D)$. $(*)$
A l'équilibre, qu'elle est la proportion de bénéficiares (B) et de demandeurs.

A l'équilibre $\mathbb{P}(X_t = B^+) = x = \dfrac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}$ et $\mathbb{P}(X_t = D) = y = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha(1-\gamma)}$, donc par la formule des probabilités totales $(*)$ on trouve, à l'équilibre

$$\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} = B) = 1 \cdot x + \gamma \cdot y_1 = \frac{1}{1-\alpha(1-\gamma)}\left(\alpha\gamma + \gamma(1-\alpha)\right) = \frac{\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}$$

2.- On distingue à présent deux types de demandeurs : les sûrs S et les risqués R de probabilités de remboursement respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est que l'emprunteur perd le statut de bénéficiaire et redevient demandeur, toujours avec un proba γ de devenir bénéficiare. La probabilité qu'un bénéficiaire tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée β

1. Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov a trois états S^+, D et R^+ correspondant à ce modèle. Les demandeurs sont sûrs avec proba β et risqué avec proba $(1-\beta)$



avec $(*) = 1 - \beta\alpha_S\gamma - (1-\beta)\alpha_R\gamma$
$= 1 - \gamma(\beta\alpha_S + (1-\beta)\alpha_R)$.

2. Ecrire la matrice de passage Q de cette chaîne.

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S^+ & D & R^+ \end{array} \\ & \begin{pmatrix} \alpha_S & 1-\alpha_S & 0 \\ \beta\alpha_S\gamma & (*) & (1-\beta)\alpha_R\gamma \\ 0 & 1-\alpha_R & \alpha_R \end{pmatrix} \begin{array}{c} S^+ \\ D \\ R^+ \end{array} \end{array}$$

3. Application numérique : $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.88$, $\beta = 0.50$ $\gamma = 0.30$; calculer Q^{50} et π^*.

$$Q^{50} = \begin{pmatrix} 0,4534.. & 0,2610.. & 0,2854.. \\ 0,4503.. & 0,2615.. & 0,2880.. \\ 0,4476.. & 0,2618.. & 0,2904.. \end{pmatrix}$$

en calculant Q^{500} on trouve

$\pi^* = (0,4509804 \quad 0,2614379 \quad 0,2875817)$

4. Recommencer avec $\alpha_S = 0.98$, $\alpha_R = 0.96$ et $\gamma = 0.50$.

$$Q^{50} = \begin{pmatrix} 0,71.. & 0,04.. & 0,23.. \\ 0,59.. & 0,05.. & 0,34.. \\ 0,48.. & 0,05.. & 0,45.. \end{pmatrix}$$

converge plus mal...

en calculant Q^{1000} on trouve

$\pi^* = (0,6363636 \quad 0,0519481 \quad 0,3116883)$
$=: (s, d, r)$.

5. pour ces deux cas, trouver une probabilité α du premier modèle donnant, à l'équilibre π^*, la même proportion de demandeurs (bénéficiaires ne remboursant pas).

On pourrait (naïvement) penser que $\alpha = \beta\alpha_S + (1-\beta)\alpha_R$ convient mais on trouve dans ce cas, pour l'équilibre de P, $y = 0,0582524 \neq 0,0519481 = d$.

On trouve un résultat plus proche avec $\alpha = \alpha_S \cdot \frac{s}{s+r} + \alpha_R \cdot \frac{r}{s+r}$ car alors $y = \underline{0,051}7748 \neq \underline{0,051}9481 = d$.

mais cela ne répond toujours pas à la question!