Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

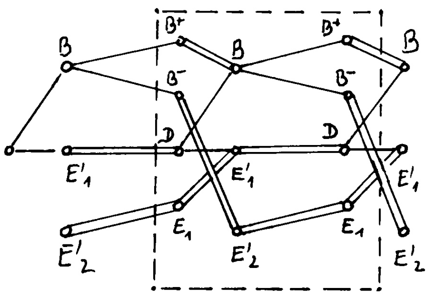
L3 MASS, année 2010-2011
Calcul Stochastique et finance (semestre 2)
Date : .
Groupe : .

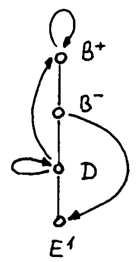
**Feuille-réponses du TD 12**
**Modèle de Tedeschi avec période d'exclusion**

**On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.**

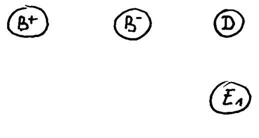
**Exercice 1. : modèle de Tedeschi, avec unique risque** On considère un modèle de Tedeschi simplifié, avec $T$ temps d'exclusion. La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour $T$ périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité $\gamma$ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire $B$. On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité $\alpha$ de rembourser son prêt : dans cas contraire il est exclu pour $T$ périodes.

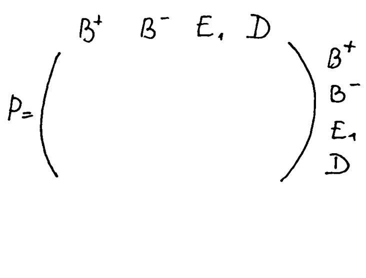
1. Notons $\mathcal{E} = \{B^+, B^-, E_{T-1}, \ldots, E_k, \ldots, E_2, E_1, D\}$ et $\mathcal{E}' = \{B, E'_T, \ldots, E_k, \ldots, E'_2, E'_1\}$ Il vous est donné ci-dessous un arbre indiquant, de gauche à droite, les transitions d'état de probabilité de passage non nulle des états $\mathcal{E}$ aux états $\mathcal{E}'$ et à nouveau aux états $\mathcal{E}$. Que représentent les segment doubles ? Indiquer les probabilités des autres transitions représentées par les flèches du diagramme à gauche et compléter le diagramme de Markov correspondant des états $\mathcal{E}$, dans le cas $T = 2$. Refaire le diagramme de Markov pour les états $\mathcal{E}'$.




2. Toujours pour $T = 2$ refaire le diagramme de la chaîne de Markov à quatre états $\{B^+, B^-, E_1, E_0\}$ correspondant à ce modèle dans la présentation ci-dessous. Ecrire la matrice de *passage* $P$ (ou de *transition*) de cette chaîne.



3. Vérifier que $(\gamma\alpha, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha)\gamma, (1-\alpha))$ est un vecteur propre[1] à gauche de cette matrice. En déduire la distribution d'équilibre $\pi^*$ de cette chaîne de Markov.

4. Rappelons que, sous des hypothèses assez générales, $P^n$ tend vers une matrice dont toutes les lignes sont égales à $\pi^*$. Application numérique : choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.50$ ; calculer $\pi^*$ et $P^{50}$.

2.- On distingue à présent à nouveau deux types de demandeurs : les sûrs $S$ et les risqués $R$ de probabilités de remboursement respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non-remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et l'exclusion de tout prêts pour $T$ périodes. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité $\gamma$ de se voir attribuer un prêt. La probabilité qu'un bénéficiare tiré parmi les demandeurs soit sûr est notée $\beta$.

1. On choisit à nouveau $T = 2$ Ecrire le diagramme de la chaîne de Markov a six états $\{B_S^+, B_S^-, E_0, E_1, B_R^-, B_R^+\}$ correspondant à ce modèle ; en vous inspirant du diagramme de l'exercice 1.2 adopter une disposition symétrique des $S$ et $R$ par rapport à un axe pourtant les $E$.

[1] On obtient facilement un tel vecteur propre par la commande suivante de `Maple` :

`with(linalg) ;`

P := matrix(4,4, [alpha,1-alpha,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,alpha*gamma,(1-alpha)*gamma,0,1-gamma]) ;

`vcps :=eigenvectors(transpose(P)) ;`

à noter que `eigenvectors` fournit les vecteurs propres à *doite ;* il suffit donc de considérer la matrice transposée pour trouver les vecteurs propres à gauche, puisque ${}^t(\pi P) = {}^tP\,{}^t\pi$.

2. Ecrire la matrice de passage $Q$ de cette chaîne.

3. Application numérique : $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.88$, $\beta = 0.50$ et $\gamma = 0.3$ ; calculer $Q^{50}$. La matrice $Q$ est-elle primitive ? Donner sa première colonne ; qu'observez-vous ? Quelle est la distribution d'équilibre $\pi^*$ de cette chaîne.