

**Feuille-réponses du TD 13**  
**Taux de remboursement à l'équilibre dans un modèle de Tedeschi sans temps  
d'exclusion à un et deux types de risques**

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

**modèle de Tedeschi, avec unique risque**

$\{B^+, D\}$  ensemble des états de la chaîne de Markov

$1 - \alpha$  probabilité de non remboursement

$\gamma$  probabilité d'attribution d'un prêt à un demandeur

$P$  matrice transition

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \gamma\alpha & 1 - \gamma\alpha \end{pmatrix}$$

**modèle de Tedeschi, avec deux risques**

$\{S^+, D, R^+\}$  ensemble des états de la chaîne de Markov

$1 - \alpha$  probabilité de non remboursement d'un emprunteur "sage" (noté  $1 - \alpha_S$  dans TD5).

$1 - \rho$  probabilité de non remboursement d'un emprunteur "risqué" (noté  $1 - \alpha_R$  dans TD5), s'écrit rho.

$\gamma$  probabilité d'attribution d'un prêt à un demandeur

$\beta$  probabilité qu'une demande sélectionnée soit "sage"

$Q$  matrice transition

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha & 0 \\ \beta\gamma\alpha & 1 - \gamma(\beta\alpha + (1 - \beta)\rho) & \gamma(1 - \beta)\rho \\ 0 & 1 - \rho & \rho \end{pmatrix}$$

On note  $\pi^*$  la distribution d'équilibre,  $\pi^* = (\pi_B, \pi_D)$  pour  $P$ , et  $\pi^* = (\pi_S, \pi_D, \pi_R)$

**Exercice 1. : Approche numérique**

1. Risque unique : on pose  $1 - \alpha = 3\%$  et  $\gamma = 30\%$ . Donner  $\pi^* = (\pi_B, \pi_D)$

2. Risque double : on pose  $1 - \alpha = 2\%$ ,  $1 - \rho = 4\%$ ,  $\beta = 50\%$  et  $\gamma = 30\%$ . Donner  $\pi^* = (\pi_S, \pi_D, \pi_R)$  et  $\pi_S/\pi_D$

3. Calculer et représenter graphiquement  $\pi_D$  et  $\pi_S/\pi_R$  pour  $\gamma \in [20\%, 40\%]$

4. A l'équilibre, sur 1000 prêts accordés, combien seront remboursés ?

### Exercice 2. : Approche formelle

Sous Maple : charger la bibliothèque d'algèbre linéaire au moyen de la commande `with(linalg)` ;

1. créer la matrice P au moyen de la commande

```
P :=matrix(2,2, [alpha, 1-alpha, gamma*alpha, 1-gamma*alpha])
```

Calculer les vecteurs propres à droite au moyen de la commande

```
v :=[eigenvectors(transpose(P))]
```

Quelle est, en fonction de  $\alpha$  et  $\gamma$ , la distribution d'équilibre  $\pi^*$  ?

2. Procéder de même pour la matrice Q. Quelle est en fonction de  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$ , la distribution d'équilibre  $\pi^*$  ?

3. Que vaut  $\pi_S/\pi_R$  ? Qu'observez-vous ?

4. A l'équilibre, pour  $\gamma = 30\%$ , sur 1000 prêts accordés, combien seront remboursés ?

5. Sachant que l'organisme de micro-crédit emprunte au taux  $r = 5\%$  à quel taux minimal  $R$  doit-il prêter pour être durable ?