

Feuille-réponses du TD 13
Taux de remboursement à l'équilibre dans un modèle de Tedeschi sans temps
d'exclusion à un et deux types de risques

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

modèle de Tedeschi, avec unique risque

$\{B^+, D\}$ ensemble des états de la chaîne de Markov

$1 - \alpha$ probabilité de non remboursement

γ probabilité d'attribution d'un prêt à un demandeur

P matrice transition

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \gamma\alpha & 1 - \gamma\alpha \end{pmatrix}$$

modèle de Tedeschi, avec deux risques

$\{S^+, D, R^+\}$ ensemble des états de la chaîne de Markov

$1 - \alpha$ probabilité de non remboursement d'un emprunteur "sage" (noté $1 - \alpha_S$ dans TD5).

$1 - \rho$ probabilité de non remboursement d'un emprunteur "risqué" (noté $1 - \alpha_R$ dans TD5), s'écrit rho.

γ probabilité d'attribution d'un prêt à un demandeur

β probabilité qu'une demande sélectionnée soit "sage"

Q matrice transition

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha & 0 \\ \beta\gamma\alpha & 1 - \gamma(\beta\alpha + (1 - \beta)\rho) & \gamma(1 - \beta)\rho \\ 0 & 1 - \rho & \rho \end{pmatrix}$$

On note π^* la distribution d'équilibre, $\pi^* = (\pi_B, \pi_D)$ pour P , et $\pi^* = (\pi_S, \pi_D, \pi_R)$

Exercice 1. : Approche numérique

1. Risque unique : on pose $1 - \alpha = 3\%$ et $\gamma = 30\%$. Donner $\pi^* = (\pi_B, \pi_D)$

2. Risque double : on pose $1 - \alpha = 2\%$, $1 - \rho = 4\%$, $\beta = 50\%$ et $\gamma = 30\%$. Donner $\pi^* = (\pi_S, \pi_D, \pi_R)$ et π_S/π_D

3. Calculer et représenter graphiquement π_D et π_S/π_R pour $\gamma \in [20\%, 40\%]$

4. A l'équilibre, sur 1000 prêts accordés, combien seront remboursés ?

Exercice 2. : Approche formelle

Sous Maple : charger la bibliothèque d'algèbre linéaire au moyen de la commande `with(linalg)` ;

1. créer la matrice P au moyen de la commande

```
P :=matrix(2,2, [alpha, 1-alpha, gamma*alpha, 1-gamma*alpha])
```

Calculer les vecteurs propres à droite au moyen de la commande

```
v :=[eigenvectors(transpose(P))]
```

Quelle est, en fonction de α et γ , la distribution d'équilibre π^* ?

2. Procéder de même pour la matrice Q. Quelle est en fonction de α , ρ , β , et γ , la distribution d'équilibre π^* ?

3. Que vaut π_S/π_R ? Qu'observez-vous ?

4. A l'équilibre, pour $\gamma = 30\%$, sur 1000 prêts accordés, combien seront remboursés ?

5. Sachant que l'organisme de micro-crédit emprunte au taux $r = 5\%$ à quel taux minimal R doit-il prêter pour être durable ?