Calcul stochastique : TP 10
Etude du modèle de Ho et Lee

Pour ce TP il n'y a pas de feuille-réponse. Vous êtes invités à rediger vos réponses dans un fichier Word dans lequel vous disposerez les figures que vous obtenez en les commentant avec soins et sans oublier de leur saisir un titre (en utilisant, dans le menu de la figure, `Edit` puis `Propriétés de la figures` puis `Titre`). Une fois le document word avec vos réponses ainsi réalisé, vous l'imprimerez en fin de séance.

Le modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon Z_t^T, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t \ := T_{\max}/N$, $t \leq T$, où Z_t^T désigne la valeur à la date t d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date T. On a donc $Z_T^T = 1$ pour n'importe quel $T \in \mathbb{T}$. C'est un modèle probabiliste sur un ensemble Ω servant à coder tous les états du monde envisagés par le modèle, filtré par une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ servant à coder l'information disponible à la date $t \in \mathbb{T}$. En fait, dans ce modèle, la seule information pertinente est celle contenue dans la suite des valeurs des v.a. $(X_t)_{t\in\mathbb{T}^*}$, $\mathbb{T}^* :=]0..T]_{\delta t}$, $X_t \in \{0, 1\}$, les X_t de même loi $\mathbb{P}^*(X_t = 0) = \pi$, $\mathcal{F}_t$-mesurables, et indépendantes de $\mathcal{F}_{t-\delta t}$Pour tout $t \in \mathbb{T}^*$, on pose $J_t := \sum_{s\in]0..t]_{\delta t}} X_s$ et on note n et k, $n \leq k$, les entiers tels que $t = n\delta t$ et $T = k\delta t$. La caractéristique d'un modèle de Ho et Lee est que les zéros coupons $Z_t^T(\omega)$ appartiennent à un arbre binaire recombinant, c'est-à-dire que, $Z_{n\delta t}^T(\omega)$ ne prend que $n + 1$ valeurs distinctes, ne dépendant que de la valeur $j = J_{n\delta t}(\omega)$. Pour $0 \leq j(= J_{n\delta t}(\omega)) \leq n \leq k$, nous noterons $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$:=`Z(n,j,k)`.

1. Pourquoi a-ton `Z(k,j,k)`$= 1$?
2. Nous avons montré que tout modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t}\eta(\theta^T(t), X_t) \text{ , où } \theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$

pour une fonction η définie par le choix[1] d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in]0, 1[$, le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$

Les valeurs des Z_0^T, $T \in \mathbb{T}$, peuvent être choisies de manière arbitraire, en pratique comme étant les valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché à l'instant $t = 0$.
Calculer $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t))$ pour tout θ et t dans $\mathbb{T}^*$, et où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance pour la probabilité $\mathbb{P}^*$.
3. Voici une implantation du modèle pour lequel on a $T_{\max} = N$ (et donc $\delta t = 1$=`delta_t`), t =`n*delta_t`, T =`k*delta_t`, $J_t(\omega)$ =`j`, $T - t$ =`l*delta_t`, T =`k*deltat_t`, $\eta(T-t, X_t(\omega))$ =`eta(l*delta_t,x)`, pour `x`$= X_t(\omega)$, $Z_t^T(\omega)$ =`Z(n,j,k)`, pour $J_t(\omega)$ =`j`, avec les choix π =`pi :=0.5`, et δ =`delta :=1.01`.

```
// Modèle de Ho et Lee
clear;Nmax=8;Tmax=Nmax;delta_t=Tmax/Nmax;
pi=0.5;delta=1.01;r=0.025;
function z0=Z0(k); z0=(1+r)^(-k*delta_t); endfunction;
plot(0 :Nmax,Z0(0 :Nmax));
//
function ee=eta(l,x);
if x==0
ee=(1^l)./(pi+(1-pi)*delta^l);
else ee=delta^l./(pi+(1-pi)*delta^l);
end;
endfunction;
// représentation des eta extrèmes
xset("window",1);clf(1);
Nprime=1000;for x=0 :1 plot(0 :Nprime,eta(0 :Nprime,x)); end;
//calcul des valeurs de la fonctions Z(n,j,k)=ZZ(n+1,j+1,k+1)
ZZ=ones(Nmax+1,Nmax+1,Nmax+1);
```

[1] C'est le choix $\delta(= \eta(\delta t, 1)/\eta(\delta t, 0)) > 1$ qui exprime qu'un $X_t(\omega) = 1$ code un "*up*" et $X_t(\omega) = 0$ code un "*down*"

```
for k=0 :Nmax
ZZ(0+1,1,k+1)=Z0(k);
end;
for n=1 :Nmax
for k=n :Nmax
ZZ(n+1,0+1,k+1)=eta(k-n,0)*ZZ(n-1+1,0+1,k+1)/ZZ(n-1+1,0+1,n+1);
for j=1 :n
ZZ(n+1,j+1,k+1)=eta(k-n,1)*ZZ(n-1+1,j-1+1,k+1)/ZZ(n-1+1,j-1+1,n+1);
end;
end;
end;
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1);
endfunction;
// Dessins : représentation des évolutions possibles de Z(n,j,N) pour N=Nmax
xset("window",2);clf(2);
N=Nmax;
//courbes "down"
for j=0 :N plot(j :N,Z(j :N,j,N),'-b'); end;
//courbes "up"
for n1=0 :N
Vecteur=zeros(N-n1+1);
for nn=0 :N-n1
Vecteur(nn+1)=Z(n1+nn,nn,N);
end;
plot(n1 :N,Vecteur,'--r');
end;
xs2gif(2,'arbHoLee.gif');xs2eps(2,'arbHoLee.eps');xs2fig(2,'arbHoLee.fig');
```

(a) Comment a été choisie la fonction $T \mapsto Z_0^T$ constituée par les valeurs initiales de Z_t^T ?

(b) Exercez-vous à lire l'arbre des valeurs de Z^8 : que vaut Z_8^8 ? Que vaut Z_0^8 et retrouver cette valeur sur la courbe `StructureParTermesInitiale`? Que vaut Z_4^8 après deux "*up*" et deux "*down*" ? Que vaut Z_6^8 après rien que des "*up*" ? On dit dans ce dernier cas que le zéro-coupon d'échéance $T = 8$ est "*above par*" ; pourquoi l'existence d'une telle situation paraît-elle être une critique à formuler contre ce modèle ?

4. **Taux actuariels :** On appelle taux actuariel d'un zéro-coupon le taux noté A_t^T (ou $a(t,T)$) tel que

$$Z_t^T(1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1.$$

Il n'est donc défini que pour $t < T$.

(a) Définir une fonction `A(n,j,k)` correspondant au zéro-coupon $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$ quand $J_{n\delta t}(\omega) = j$, qui est lui de valeur `Z(n,j,k)`.

(b) Représenter l'arbre des taux actuariels joignant chaque valeur de A_t^T aux deux valeurs $A_{t+\delta t}^T$ pouvant lui succéder dans ce modèle.

(c) Comment se manifeste ici ce que vous avez observé pour Z_6^8 dans la question précèdente.