2009-2010

NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Calcul stochastique : TP 11
Prix de caps et de floors dans un modèle de Ho et Lee

On reprend les notations du TP précédent pour le modèle de taux de Ho et Lee. Le zéro-coupon Z_t^T, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t := T_{\max}/N$, $t \leq T$, désigne la valeur à la date t d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date T. Rappelons qu'il satisfait à la récurrence :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t} \eta(\theta^T(t), X_t) \text{ , où } \theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$

pour une fonction η définie par le choix d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in]0, 1[$, le modèle retenu, par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$

Les valeurs des Z_0^T, valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché à l'instant $t = 0$, sont choisies comme dans le TP précédent. On définit le taux court, "sans risque" r_t, par

$$Z_t^{t+\delta t}(1 + r_{t+\delta t}) = 1$$

. On voit donc que $r_{t+\delta t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable (on dit que le processus $(r_t)_{t\in\mathbb{T}^*}$ est $\mathbb{F}$-*prévisible*) ; on pose

$$B_t := (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t}) \ldots (1 + r_t) \text{ et } \tilde{Z}_t^T := Z_t^T / B_t.$$

Les constantes sont, comme précédemment $T_{\max} = N$ (et donc $\delta t = 1$=`delta_t`), t =`n*delta_t`, T =`k*delta_t`, $J_t(\omega)$ =`j`, $T - t$ =`l*delta_t`, T =`k*deltat_t`, $\eta(T - t, X_t(\omega))$ =`eta(l*delta_t,x)`, pour `x`= $X_t(\omega)$, $Z_t^T(\omega)$ =`Z(n,j,k)`, pour $J_t(\omega)$ =`j`, avec les choix π =`pi :=0.5`, et δ =`delta :=1.01`

et le taux actuariel d'un zéro-coupon, noté A_t^T (ou $a(t, T)$) et défini par $Z_t^T(1+A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1$ est calculé au moyen de la fonction `A(n,j,k)`.

1. Etudier comment la courbe des zéros coupons $T \mapsto Z(t, T)$ se déforme lorque t passe de $t = 0$ à $t = \delta t$, $t = 2\delta t$, ...et représenté approximativement les courbes obtenues sur un arbre comme à la page 46 du cours.

2. Faire la même étude mais cette fois pour l'arbre des courbes de taux $T \mapsto A(t, T)$.

3. **Caplets et Caps :** Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souscrire en même temps un contrat qui prend en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal K. Typiquement, si l'on désigne par r_T l'intérêt payable à la date T pour l'emprunt d'un euro à la date $T - \delta t$, ce contrat payera $(r_T - K)^+$. Ce contrat est un *caplet à* l'échéance T au plafond K. Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date $t - \delta t$, par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en $Z^t_{t-\delta t}$ et en placement (risqué) en $Z^{t+\delta t}_{t-\delta t}$. Son prix se calcule comme dans le cas des options pour un modèle CRR par

$$\mathrm{Caplet}^T_{t-\delta t} = \mathbb{E}^*(\mathrm{Caplet}^T_t \mid \mathcal{F}_{t-\delta t})/(1 + r_t) \tag{3}$$

(et plus généralement, pour tous $s \leq t$, $\mathrm{Caplet}^T_s = \mathbb{E}^*\left(\mathrm{Caplet}^T_t \frac{B_s}{B_t} \mid \mathcal{F}_s\right)$). De manière similaire au cas des zéro-coupons et des taux actuariels, on introduit une hyper matrice $\mathrm{Caplet}^T_t(\omega)$=`Caplet(n,j,k)`. Voici un programme permettant de calculer le prix d'un caplet :

```
CCaplet=zeros(Nmax, Nmas,Nmax+1);
for k=1 :Nmax
for j=0 :k-1 CCaplet(k-1+1,j+1,k+1)=max(0,A(k-1,j,k)-K)*Z(k-1,j,k);
end; end;
for k=1 :Nmax
for n=k-2 :-1 :0
for j=0 :n
CCaplet(n+1,j+1,k+1)=Z(n,j,n+1)*(pi*CCaplet(n+1+1,j+1,k+1)..
+(1-pi)*CCaplet(n+1+1,j+1+1,k+1));
end;end;end;
```

Expliquez comment est défini `CCaplet` lorsque n=k

4. Expliquez comment est défini `CCaplet` lorsque n¡k

5. Quelle valeur trouvez-vous pour $Caplet(Nmax)$?

Application : Dans le modèle de Ho et Lee considéré (où $r_{\delta t}$=2,5%), quel est le prix d'un Cap de plafond K =4,5% pour un emprunt de 1.000.000 euros sur 15 ans si l'on suppose que les taux sont ajustés et payés annuellement. Expliquez comment vous calculez le Cap correspondant.

6. Idem pour un plafonnement à 3,5%.