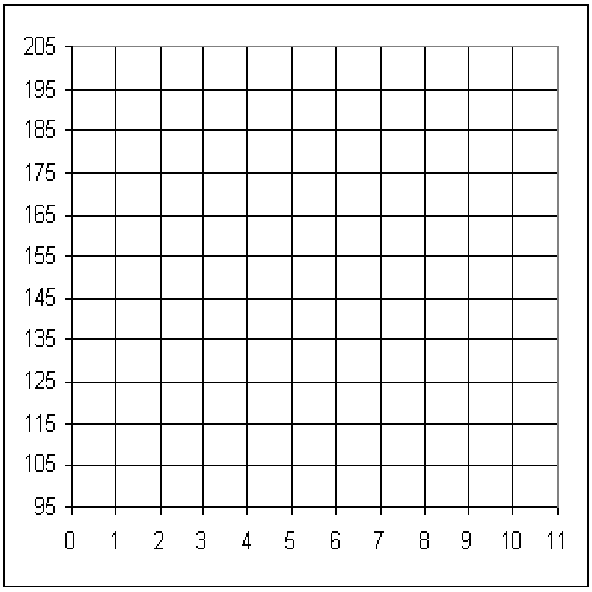
NOM : Calcul Stochastique et Applications à la Finance.
PRENOM : Date : .

Feuille de réponses du TP 1
Les trajectoires d'un modèle CRR à n étapes

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant.

Charger Scilab puis ouvrir un éditeur en cliquant sur `Editeur` dans le menu en haut de fenêtre. Saisir successivement les paties du programme ci-dessous se rapportant à l'exercice.

Exercice 1. : Calcul de la marche CRR On rappelle que la marche CRR S_t est définie par sa valeur initiale S_0 et la relation $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\texttt{up},\texttt{down}\}$. On choisit ici $up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et $down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, où σ est une constante (la volatilité de l'actif) et n le nombre d'étapes, $T = n\delta t$. Pour les calculer on range les valeurs de S_t dans une matrice triangulaire[1] $S(i,j) = SS(i+1, j+1)$, où $i = 0, \ldots, n$ est l'indice du pas de temps $t = i\delta t$ et $j = 0, \ldots, i$ le nombre de *up*. Calculer au moyen de Scilab les valeurs de S_t dans un modèles à $n = 3$ étapes puis représenter sur le dessin suivant les 10 points de coordonnées $(i, S(i,j))$ pour $i = 0, \ldots, 3$ et $j = 0, \ldots, i)$ en les liant pour former l'arbre CRR de ce modèle. Attention au décallage d'une unité de i et j pour l'ordonnée $S(i,j) = SS(1+i, 1+j)$ de ces points !



[1]La numérotation des lignes et des colonnes par Scilab commence à 1 et non 0 !

Exercice 2. : Tracé d'une trajectoire Une trajectoire de la marche CRR est caractérisée par une suite de `up,down` que nous représenterons par une suite de 1 et de 0. On désigne par $J(i)$ la fonction qui donne pour une trajectoire le nombre de `up` entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = i\delta t$. Ainsi pour la trajectoire donnée par la suite $1, 1, 0, 0, 0, 1, 0$, $J(2) = J(5) = 2$ et $J(6) = 3$.

1. Saisir la second partie du programme. Noter qu'il utilise l'instruction `xset("window",1)` qui choisit (et éventuellement crée) la fenêtre 1 comme fenêtre graphique courante (qu'on peut effacer au moyen de `clf(1)`). Il utilise aussi l'instruction `cumsum`. En vous aidant éventuellement de l'aide en ligne de Scilab, indiquer ce que fait cette instruction.

2. Tracer plusieurs trajectoires en changeant le nombre de pas de temps n et la suite des 0 et 1. Quelle valeur est atteinte par une trajectoire pour laquelle la succession des 0 et 1 est parfaitement régulière et alternée ? Expliquer le résultat que vous observez.

Exercice 3. : Simulation d'une suite de 0 et de 1

1. La fonction `rand()` de Scilab (comme la touche `random` d'une calculette) renvoit un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Si l'on précise `rand(m,n)`, on obtient une matrice de taille $m \times n$ dont toutes les composantes sont des nombres aléatoires distribués selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais pour diverses (petites) valeurs de m et de n. La fonction `2*rand()-1` renvoit encore un nombre aléatoire, mais il n'est plus distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais puis déterminer quelle loi est simulée par cette fonction.

2. La suite des instructions suivantes permet de vérifier si la loi simulée est bien une loi uniforme : `x=rand(1,1000);histplot(10,x)` Expliquer ce que vous voyez sur la figure produite (dites en particulier ce que représente le 10) et ce que vous devriez voir si la loi était parfaitement uniforme.

3. En vous aidant éventuellement de l'aide en ligne de Scilab, indiquer ce que fait l'instruction `int`.

4. La fonction `int(0.5+rand())` renvoit encore un nombre aléatoire, mais il n'est plus distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais puis déterminer quelle loi est simulée par cette fonction.

Exercice 4. : Simulation de M trajectoires de CRR

1. On souhaite à présent simuler un nombre M de trajectoires de la marche CRR. Que retourne, à votre avis, `int(p+rand(n,M))` (si $p \in]0, 1[$) ?

2. Et, si l'on pose `deltaJ=int(p+rand(n,M))`, que retourne `cumsum(deltaJ,"r") ?`

3. On suppose $n = 100$. Simuler $M = 40$ trajectoires en choisissant $p = 0.5$. En reproduisant la simulation avec d'autres valeurs de la volatilité σ, étudier et expliquer l'influence de ce paramètre sur la forme des trajectoires.

Exercice 5. : Loi de la marche CRR à l'instant T. Représentez un histogramme des valeurs finales (on prendra par exemple $n = 200$) des trajectoires aléatoires de CRR ; pour cela, on simulera $M = 40$ trajectoires au moins et on prendra par exemple`int(sqrt(M))` pour nombre de classes. Indiquer l'allure de l'histogramme obtenu.

```
//Exercice 1 : Calcul de la marche de CRR /////////////
n=100 ;T=1 ;delta_t=T/n ;
SS=zeros(n+1,n+1) ;
S0=140 ;sigma=0.4 ;
up=exp(sigma*sqrt(delta_t)) ;down=1/up ;
SS(1,1)=S0 ;
for i=1 :n
SS(i+1,0+1)=SS(i,0+1)*down ; // ici j=0
for j=1 :i
SS(i+1,j+1)=SS(i,j)*up ;
end ;
end ;
// Exercice 2 : Trac d'une trajectoire de CRR ////////////////////////
n=10 ;deltaJ=[1 1 0 0 0 1 0 0 1 1] ;
J=cumsum(deltaJ) ;
traj=zeros(1,n) ;
traj(1)=SS(1,1) ;
for i=1 :n
traj(i)=SS(1+i,1+J(i)) ;
end ;
xset("window",1) ;
plot2d(1 :10,traj) ;
// Exercice 3 : Simulation d'une suite de 0 et de 1 ////////////////////////
rand() ;
rand(3,2) ;
rand(3,3) ;
2*rand()-1 ;
x=rand(1,1000) ;
xset("window",2) ;
histplot(10,x) ;
int(0.5+rand(1,10)) ;
// Exercice 4 : Simulations de M trajectoires de CRR /////////////////
M=100 ; n=100 ;
MdeltaJ=int(0.5+rand(M,n)) ;
MJ=cumsum(MdeltaJ,"c") ;
Mtraj=zeros(M,1+n) ;
for m=1 :M
Mtraj(m,1)=S0 ;
for i=1 :n
Mtraj(m,1+i)=SS(i+1,MJ(m,i)+1) ;
end ;
end ;
xset("window",3) ;
for m=1 :M
plot2d(Mtraj(m,1 :n)) ;
end ;
// Exercice 5 : Loi de la marche CRR l'instant T /////
xset("window",4) ;
histplot(int(sqrt(M)),Mtraj(1 :M,n+1)) ;
```