NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Calcul Stochastique et applications à la finance
Feuille-réponses du TP 2
Prix d'une option dans un modèle CRR

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignante chargée du TP.

L'objet de cet séance est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call et celui d'une option Put de pay-off respectifs $\varphi(S) = (S-K)^+$ et $\varphi(S) = (K-S)^+$. Dans un premier temps nous considèrons les Call et les Put à *la monnaie*, c'est-à-dire que l'on supposera leur prix d'exercice égal à $K = S_0$. Rappelons que dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, les prix sont modélisés par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\mathtt{up},\mathtt{down}\}$. 0n pose à nouveau

$$n = 100 \;\; T = 1 \;\; \delta t = T/n \;\; up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \;\; down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \;\; \sigma = 0.4 \;\; S_0 = 140.$$

Et on introduit comme dans le TP1 la notation $S(i,j) = SS(i+1,j+1)$.

Exercice 1. : En utilisant le programme du TP1, recalculer les valeurs de SS pour $i \in \{0,\dots,n\}$ et $j \in \{0,\dots,i\}$.

1. Rappeler ici les lignes de code utilisées.

2. Les valeurs de $SS(6,2)$, $SS(11,6)$ et $SS(100,50)$ sont-elles plus grandes ou plus petites que $S0$. Expliquer pourquoi.

3. Quelles valeurs trouvez-vous pour SS lorsque la volatilité σ est nulle ? Expliquez pourquoi.

Exercice 2. **:** On sait que le prix $c(t, S_t)$ d'un portefeuille de couverture d'une option ayant pour pay-off φ et de date d'exercice T peut se calculer par récurence rétrograde : on connait c à l'instant T puisque $c(T, S_T) = \varphi(S_T)$ puis, pour tous les $0 \leq t \leq T - \delta t$, on pose $c(t, S_t) = pc(t + \delta t, S_t u) + (1 - p)c(t + \delta t, S_t d))/R$ où p est la probabilité risque neutre et R le coefficient d'actualisation. En notant $C(i, j) := c(i\delta t, S(i, j))$, on a donc, pour $i = n$ $C(n, j) = \varphi(S(n, j)$, puis pour $0 \leq i \leq n - 1$ $C(i, j) = (pC(i+1, j+1) + (1-p)C(i+1, j))/R$. On va à présent utiliser cette récurrence rétrograde pour calculer le prix d'un Call à la monnaie.

1. On revient à une volatilité non nulle $\sigma = 0.4$. Sous `scilab`, pour le même raisons que pour S, on posera `CC(1+i,1+j)`=$C(i, j)$.
   Compléter le code Scilab ci-dessous calculant les valeurs `CC(i,j)` d'une option Call d'échéance $T = 1$ dans un modèle à $n = 100$ étapes (3 lignes incomplètes).

```
r=0.1 ;R=exp(r*delta_t) ;K=S0 ;
p=(R-down)/(up-down) ;
function phi=phi(S) ;
phi=...................... ;
endfunction ;
CC=zeros(n+1,n+1) ;
for j=0 :n
CC(1+n,1+j)=................... ;
end ;
for i=n-1 :-1 :0
for j=0 :i
CC(1+i,1+j)=.......................................................... ;
end ;
end ;
```

2. Quelle valeur trouvez vous pour la *prime* $c(0, 0) = CC(1, 1)$ d'un Call à la monnaie ?

Exercice 3. :
Reprendre les deux dernières questions pour un Put à la monnaie.

Exercice 4. :

1. Vérifier expérimentalement pour diverses valeurs de t la relation de parité Call-Put
$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

2. Etudier comment varie le prix d'un Call en fonction de son prix d'exercice K : faites le calcul à *la monnaie* c'est-à-dire pour $K = S0$ puis recommencer pour d'autres valeurs de K, $K = S0 - 10$, $K = S0 + 10$, etc... Expliquer.

3. Reprendre la question précédente dans le cas d'un Put. Expliquer.