NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Calcul stochastique : feuille de réponses du TP 5
Calcul du prix d'une option barrière

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $n = 10$, $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 150$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. **:** Créer un nouveau code Scilab en commençant par y recopier la définition de SS et celle de CC utilisée dans les TP précédents. Avant de l'exécuter, modifier les valeurs des constantes.

Combien vaut l'actif sous-jacent après 10 "down" ? Combien après 6 "down" et 4 "up" ? Combien vaut le Call à la monnaie ($K = S_0$) à l'instant t=0 ? Combien vaut-il à l'instant $t = \frac{1}{2}$ si l'actif sous-jacent n'a eu que des "up" ?

On obtient la valeur de l'actif sous-jacent après 10 "down" en affichant $SS(i,j)$ pour $i = 11$ et $j = 1$. Dans notre cas $SS(11,1) \simeq 42,34$. Après 6 "down" et 4 "up", $i = 11$ et $j = 5$ et donc $SS(11,5) \simeq 116,47$. A l'instant $t = 0$, le Call à la monnaie ($K = S_0$) vaut $CC(1,1) \simeq 26,45$. A l'instant $t = \frac{1}{2} = \frac{T}{2} = 5\delta t$, s'il n'y a eu que des "up", $j = 5+1$ et donc $CC(6,6) \simeq 136,04$.

Exercice 2. **:** On rappelle qu'une option DIC est une option Call qui ne prend sa valeur à l'instant final T que si le cours de l'actif sous-jacent est passé en dessous d'une barrière.

Pour calculer la valeur d'une option DIC (on prendra ici la barrière égale à $L = 100$), on va utiliser, comme pour un Call vanille, sa définition

$$DIC_0 = \mathbb{E}\left(\varphi(S_T)\mathbb{I}_{\tau_L < T}\right)$$

en programmant le calcul de cette espérance par récurrence retrograde. On procède de la façon suivante. Mais pour prendre en compte l'indicatrice $\mathbb{I}_{\tau_L<T}$, on ajoute aux deux variables i et j usuelles une troisième variable notée k qui vaut 0 ou 1 selon que $\mathbb{I}_{\tau_L<T}$ vaut 0 ou 1. La fonction $sousL(i,j)$ est une fonction qui vaut 1 lorsque l'on est sous la barrière et 0 si l'on est au dessus et on l'utilise de la façon suivante. En $t = T$, l'option vaut $\varphi(S_T)$ lorsque $k = 1$ et elle vaut 0 sinon. Donc

$$DICC(n,j,1) = \varphi(SS(n,j)) \quad , \quad DICC(n,j,0) = 0.$$

Lorsque $t < T$, l'option est égale à l'espérance actualisée de ses deux valeurs suivantes (comme pour un Call vanille) et la troisième variable k passe de 0 à 1 (ou reste en 0 ou reste en 1) selon que l'on franchit la barrière ou non. On a donc :

$$DICC(i,j,k) = e^{-rT}\left(pDIC(i+1,j+1,k') + (1-p)DIC(i+1,j,k')\right)$$

où $k' = \max(k, sousL(i,j))$ reste égale à k si la barrière n'est pas franchie à l'étape $i+1$ ou prend la valeur $k+1$ si elle est franchie.

Saisir le code correspondant (voir ci dessous) et expliquer pourquoi l'un des terme $\max(k, sousL(i,j))$ qui y figure n'est pas nécessaire et aurait pu être remplacé par k.

Dans la formule le terme $\max(k, sousL(i,j))$ vaudra toujours k sauf lorsque $k = 0$ (on n'a pas franchi la barrière) et $sousL(i,j) = 1$ (on passe sous L). Or ceci ne peut pas se produire à l'occasion d'un "up" (dans le terme $p\,DIC(i+1,j+1,k')$) et donc, dans ce terme, on pourrait remplacer k' par k.

1. Indiquer la valeur trouvée pour la DIC puis étudier comment varie son prix lorsque L se rapproche de S_0. Comment pouvez-vous l'expliquer ?

On choisit de calculer DIC(1,1,1) pour quelques valeurs de L entre L = 100 et L = S_0 = 150.

L = 100	DIC(1,1,1) = 0,0381
L = 120	DIC(1,1,1) = 2,686
L = 140	DIC(1,1,1) = 9,895

On observe que lorsque L s'approche de S_0, DIC augmente.
A la limite, pour L = S_0, la DIC se confond avec le Call puisqu'on peut considéré que, dans ce cas, la frontière est franchie dès le départ.
Plus la barrière est proche de S_0, plus le nombre de trajectoires qui la franchissent est grand et donc plus rares sont les cas où l'option est OUT.

2. Modifier le programme précédent (on en fera une copie auparavant) pour calculer le prix d'une option DOC. Comparer les trois quantités Call, DIC et DOC à divers instants et commenter.

Pour calculer DOC, on modifie la condition terminale de la récurrence :
```
if k==0 then DOCC(n+1,j+1,k+1)=phi(SS(n+1,j+1));
else DOCC(n+1,j+1,k+1)=0
end;
```
autrement dit, si k=0 c'est que l'on n'a pas franchi la barrière alors DOC n'est pas nulle, sinon DOC est nulle.
On trouve (pour L=100), DOCC(1,1) ≃ 26,42
Comme Call ≃ 26,45 et DICC ≃ 0,03, on a bien (aux arrondis près) l'égalité $\boxed{\text{DIC} + \text{DOC} = \text{Call}}$ (*)

3. Reprendre les deux questions précédentes pour des options DIP et DOP.

Comme nous l'avons vu lors des TP précédents, le passage du Call au Put consiste seulement à changer le pay off phi en psi.
En reprenant ce qui a été fait aux questions 1 et 2 dans ce cas là, on trouve DIP(1,1,1) ≃ 13,77 (pour L=100)
DOP(1,1,1) ≃ 5,373
donc, comme Put(1,1) ≃ 19,143, on retrouve la relation $\boxed{\text{DIP} + \text{DOP} = \text{Put}}$ qui est vraie pour les mêmes raisons.

(*) Cette relation s'explique de la façon suivante : elle est vraie en t=T car chaque trajectoire a soit franchi soit pas franchi la barrière et elle est donc comptée soit dans DIC, soit dans DOC. Le pay off de DIC+DOC en T est donc égal à celui du Call. Par AOA (absence d'opportunité d'arbitrage), cela reste vrai en t = 0. D'où l'égalité.