3. **Caplets et Caps :** Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souscrire en même temps un contrat qui prend en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal K. Typiquement, si l'on désigne par r_T l'intérêt payable à la date T pour l'emprunt d'un euro à la date $T-\delta t$, ce contrat payera $(r_T-K)^+$. Ce contrat est un *caplet à* l'échéance T au plafond K. Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date $t-\delta t$, par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en $Z^t_{t-\delta t}$ et en placement (risqué) en $Z^{t+\delta t}_{t-\delta t}$. Son prix se calcule comme dans le cas des options pour un modèle CRR par

$$\mathrm{Caplet}^T_{t-\delta t} = \mathbb{E}^*(\mathrm{Caplet}^T_t \mid \mathcal{F}_{t-\delta t})/(1+r_t) \tag{3}$$

(et plus généralement, pour tous $s \leq t$, $\mathrm{Caplet}^T_s = \mathbb{E}^*\left(\mathrm{Caplet}^T_t \frac{B_s}{B_t} \mid \mathcal{F}_s\right)$). De manière similaire au cas des zéro-coupons et des taux actuariels, on introduit une hyper matrice $\mathrm{Caplet}^T_t(\omega)$=`Caplet(n,j,k)`. Voici un programme permettant de calculer le prix d'un caplet :

```
CCaplet=zeros(Nmax, Nmax,Nmax+1);
for k=1 :Nmax
for j=0 :k-1 CCaplet(k-1+1,j+1,k+1)=max(0,A(k-1,j,k)-K)*Z(k-1,j,k);
end; end;
for k=1 :Nmax
for n=k-2 :-1 :0
for j=0 :n
CCaplet(n+1,j+1,k+1)=Z(n,j,n+1)*(pi*CCaplet(n+1+1,j+1,k+1)..
+(1-pi)*CCaplet(n+1+1,j+1+1,k+1));
end;end;end;
```

(*)

Expliquez comment est défini CCaplet lorsque n=k

On a posé $t = n\delta t = n * \text{delta\_t}$ et $T = k\delta t = k * \text{delta\_t}$.
Par définition $\mathrm{Caplet}_T^T = \max(0, r_T - K)$, d'où
$\mathrm{CCaplet}(n+1, j+1, k+1) = \mathrm{Caplet}^{k\delta t}_{n\delta t} = \max(0, r_{k\delta t} - K)$
Comme $r_T = A^T_{T-\delta t} = A(k-1, j, k)$ on n'a défini CCaplet que pour $n<k$, d'où (*)

4. Expliquez comment est défini CCaplet lorsque n<k

Comme, pour $t<T$, $\mathrm{Caplet}_t^T = Z_t^{t+\delta t}\,\mathbb{E}_t(\mathrm{Caplet}^T_{t+\delta t})$, on a, pour $n<k$
CCaplet(n+1, j+1, k+1) = Z(n, j, n+1) *..
(p * CCaplet(n+2, j+2, k+1) + (1-p) * CCaplet(n+2, j+1, k+1))

5. Quelle valeur trouvez-vous pour *Caplet*(*Nmax*) ?

Caplet(Nmax) = CCaplet(1, 1, Nmax+1) = 0,00035654

Application : Dans le modèle de Ho et Lee considéré (où $r_{\delta t}$=2,5%), quel est le prix d'un Cap de plafond K =4,5% pour un emprunt de 1.000.000 euros sur 15 ans si l'on suppose que les taux sont ajustés et payés annuellement. Expliquez comment vous calculez le Cap correspondant.

Pour un prêt d'un euro remboursable à la date T_{max} et à intérêt payables à intervalle δt = un an il convient de souscrire à un Cap, qui est la somme de tous les caplets d'échéance $T \in]0,.T_{max}]\delta t$. Pour 10^6 euros, c'est 10^6 fois plus ! Ici $T_{max} = 15$
Pour $Z_0^T = e^{-rT}$ avec $r = 2.5\%$ et $K = 4.5\%$ on trouve $\mathrm{Cap}_{4.5\%}(15) = 767.3$ €, soit moins de 0.1% de la somme empruntée

6. Idem pour un plafonnement à 3,5%.

On réexécute le programme avec $K = 3.5\%$ et on trouve $\mathrm{Cap}_{3.5\%}(15) = 5271,2$ €, soit près de 5,3% de la somme empruntée ! Le modèle anticipe donc qu'à 1% de plus que le taux en cours, les Caplet(t) seront "souvent" dans la monnaie.