Table des matières

Chapitre 1

Prix et couverture d'une option d'achat

Dans cette première leçon, on explique comment on peut calculer le prix d'un contrat d'option en évaluant celui d'un portefeuille de couverture de cette option. On se place dans un cas très simple, celui d'une option d'achat sur un actif financier dont on a modélisé la dynamique au moyen d'un arbre binaire. Le taux d'intérêt monétaire est supposé constant pendant la durée du contrat.

Définition : Une *option* d'achat (européenne)*, encore appelée call*, est un titre donnant droit à son détenteur d'acheter un actif financier à une date future et à un prix fixé. Il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Le prix fixé s'appelle le *prix d'exercice* de l'option et la date de fin du contrat la *date d'échéance* ou *date d'exercice*. L'actif financier sur lequel porte le contrat s'appelle l'*actif sous-jacent*.

Le propre d'un contrat d'option, tient à ce qu'à la date de souscription, la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent n'est pas connue mais le paiment que pourra exiger le détenteur de l'option, s'il exerce l'option, dépend de cette valeur à l'écheance. C'est pourquoi on appelle aussi les options des *contrats contingents*. On peut comprendre, dans un premier temps, un tel contrat comme un contrat d'assurance : le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré, ce dernier cherchant à se couvrir contre une envolée de la valeur du sous-jacent. Il s'agit alors d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une différence essentielle entre un contrat d'assurance classique (assurance habitation ou automobile) et un contrat d'option.

L'exemple le plus naturel d'actif financier est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première comme le prix d'une tonne de zing ou celui d'un produit agricole tel le prix de 50.000 livres de boeuf. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricoles déjà courants au siècle dernier. Les contrats d'option sur actions se sont vraiment développés lorsqu'ils ont pu faire l'objet d'une négociation en bourse, c'est-à-dire à partir des années 70 sur le CBOT, à Chicago, puis progressivement dans la plupart des autres places financières.

1.1 Evaluation du prix dans un modèle à une étape

Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple. Notons $t = 0$ l'instant de souscription de l'option, $t = T$ son échéance et K son prix d'exercice. Supposons que l'actif sous-jacent ait la valeur S_0 à l'instant initial et qu'il ne puisse prendre que deux valeurs $S_T = S_0u$ ou $S_T = S_0d$ à l'échéance, avec $0 < d < 1 < u$. On verra qu'il est naturel de supposer en outre que $S_0d < K < S_0u$. Soit C_0 la valeur, à déterminer, du call à l'instant $t = 0$; c'est le prix du contrat, ou la *prime*. A l'instant initial le vendeur ne sait pas si S_T prendra la valeur S_0u ou S_0d, mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si $S_T = S_0d$, l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à K) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si $S_T = S_0u$, l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu K, soit $S_0u - K$, somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix. Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ? L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé *portefeuille de couverture* Π, composé de a actifs S_0 et de b unités monétaires, et de choisir sa composition a et b de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option, c'est-à-dire 0 si $S_T = S_0d$ et

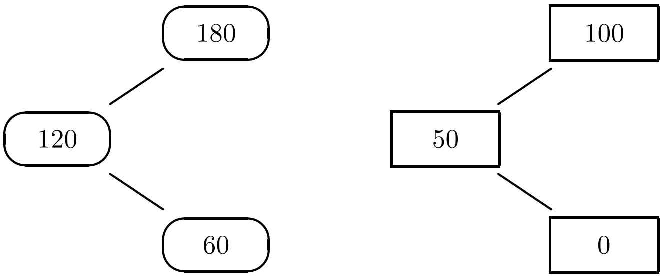


Fig. 1.1 – Un exemple de modèle à une étape

$S_0u - K$ si $S_T = S_0u$. . Si l'on désigne par r le taux d'intérêt monétaire, la *composition du portefeuille* (a, b) devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} aS_0u + be^{rT} & = & S_0u - K \\ aS_0d + be^{rT} & = & 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

On résout facilement ce système (système linéaire de deux équations à deux inconnues a et b) et on déduit des valeurs de a et b obtenues la valeur du portefeuille à l'instant initial $\Pi_0 = aS_0 + b$. On peut alors donner à C_0 la valeur $C_0 = \Pi_0$.

Exemple : Par exemple, si $S_0 = 120$, $u = 1,5$, $u = 0,5$, $r = 0$, et $K = 80$, la résolution du système (1.1) donne $a = \frac{5}{6}$, $b = -50$ et donc $\Pi_0 = 50$. Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à $C_0 = 50$, le vendeur emprunte 50 (car $b = -50$) et achète $a = \frac{5}{6}$ de S_0 (au prix 100) ; à l'échéance, son portefeuille vaudra soit $150 = \frac{5}{6}180$, si $S_T = S_0u$, et il paiera alors $100 = 180 - 80$ au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans interêts puisqu'on a supposé $r = 0$), soit il vaudra $50 = \frac{5}{6}60$, si $S_T = S_0d$, ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

Remarque : Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système (1.1) admette une solution, ce qui est assuré dès que $u \neq d$, ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à $t = T$, il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option !

Remarque : Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option ; par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix K (au lieu du droit d'acheter), appelé un *put*, sa valeur à l'échéance sera $K - S_0d$ si $S_T = S_0d$ et 0 si $S_T = S_0u$. Plus généralement, si l'on désigne par $C_T = \varphi(S_T)$ le prix du contrat d'option à l'instant T, la résolution du système (1.1) dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donnée par

$$a = \frac{\varphi(S_0u) - \varphi(S_0d)}{S_0u - S_0d} \tag{1.2}$$

Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de *delta de couverture* (ou simplement *delta*). Il désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir l'option.

1.2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique.

La seule idée du portefeuille de couverture (a, b) constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois). Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre $t = 0$ et $t = T$) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur S_t du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.

Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent : $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$ et (S_t) prenant la valeur S_0 à l'instant initial, l'une des deux valeurs $S_{\delta t} = S_0d$ ou $S_{\delta t} = S_0u$ à l'instant intermédiaire $t = \delta t$ et l'une des trois valeurs $S_T = S_0d^2$, $S_T = S_0ud$ ou $S_T = S_0u^2$ à l'échéance. Pour déterminer la

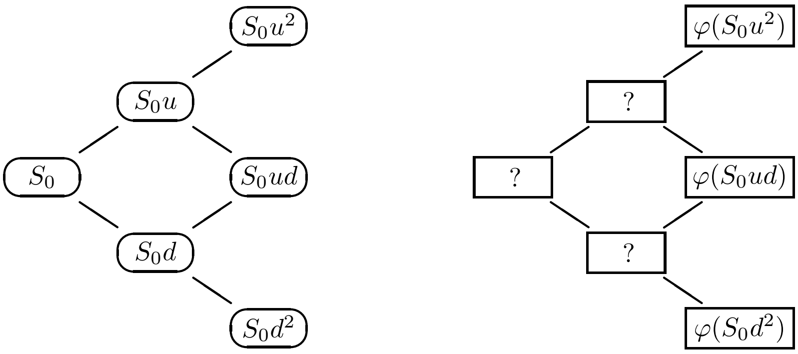


FIG. 1.2 – Quelles valeurs donner à l'option aux instants $t = \delta t$ et $t = 0$?

valeur d'un portefeuille de couverture d'une option $C_T = \varphi(S_T)$, raisonnons en partant de sa valeur Π_T à l'échéance, qui est connue puisque, pour *couvrir* l'option il devra valoir $\Pi_T = \varphi(S_T)$, somme due en $t = T$ par le vendeur à l'acheteur de l'option. Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par S_T. En utilisant la même méthode que dans le cas d'un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$ que devra prendre le portefeuille à l'instant $t = \delta t$, selon que $S_{\delta t} = S_0 d$ ou $S_{\delta t} = S_0 u$. Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes

$$\begin{cases} aS_0u^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0u^2) \\ aS_0ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0ud) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} aS_0ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0ud) \\ aS_0d^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0d^2) \end{cases} \tag{1.4}$$

Désignons par $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ les deux valeurs de $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t}S_{\delta t} + b_{\delta t}$ obtenues en remplaçant d'une part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (1.3) et $S_{\delta t}$ par S_0u et d'autre part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (1.4) et $S_{\delta t}$ par S_0d. Pour obtenir la valeur cherchée du portefeuille à l'instant initial, qui sera comme précédemment la valeur initiale de l'option (ou prime), il reste alors simplement à résoudre le système

$$\begin{cases} aS_0u + be^{r\delta t} & = & \Pi^u_{\delta t} \\ aS_0d + be^{r\delta t} & = & \Pi^d_{\delta t} \end{cases} \tag{1.5}$$

Exemple : Soit un titre valant $S_0 = 80$ et changeant deux fois de prix avant l'échéance en $T = 2\delta t$. Observons que dans l'exemple précédent nous avions, à $t = \delta t$, $S_{\delta t} = S_0(1 + \frac{1}{2})$ ou $S_{\delta t} = S_0(1 - \frac{1}{2})$. Supposons qu'ici S suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \tfrac{1}{2}) \ , \ S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \tfrac{1}{2}).$$

Cela donne pour cet actif la dynamique indiquée figure 1.2 :

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \tag{1.6}$$

$$S_0 = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \tag{1.7}$$

$$S_0 = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \tag{1.8}$$

Soit une option call de date d'exercice $T = 2\delta t$ et prix d'exercice $K = 80$ (lorsque $K = S_0$, on dit que c'est une option "à la monnaie"). On suppose, pour simplifier, que le taux d'intéret monétaire r est ici égal à 0.

Observons que si $S_{\delta t} = 120$ nous retrouvons l'exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c'est-à-dire si $S_{\delta t} = 120$), doit valoir

$$\Pi^u_{\delta t} = 50.$$

Qu'en est-il si $S_{\delta t} = 40$? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilité à venir pour $S_{2\delta t}$ sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d'exercice $K = 80$, on aura dans les deux cas $\varphi(S_{2\delta t}) = 0$, et donc $a_{\delta t} = b_{\delta t} = \Pi_{\delta t} = 0$ puisqu'il n'y a plus rien à couvrir dans ce cas.

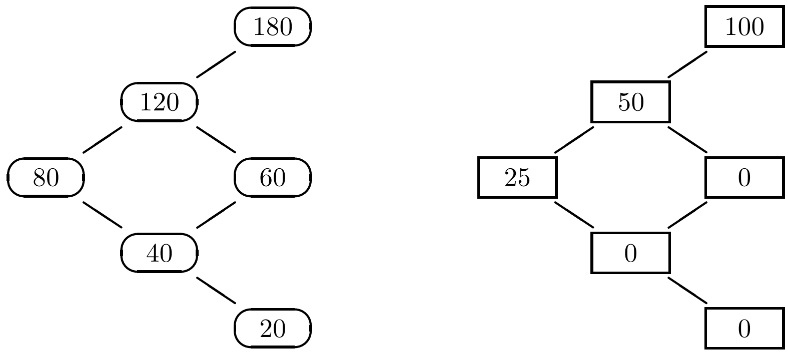


FIG. 1.3 – Deux pattes-d'oie : la première représente l'évolution sur deux étapes d'un actif à dynamique stochastique binaire, avec $S_0 = 80$ et $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$; la seconde celle du portefeuille de couverture d'un call sur cet actif de prix d'exercice $K = 80$.

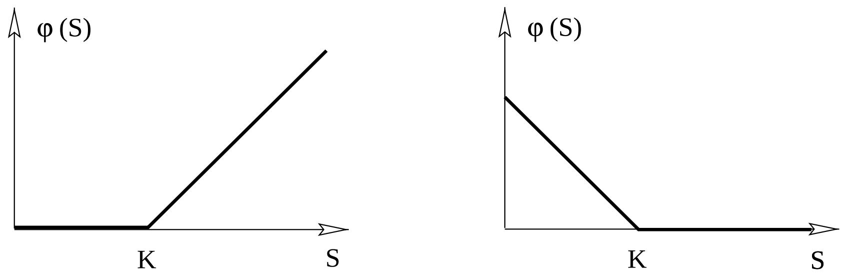


FIG. 1.4 – Fonction de paiement (ou pay-off) d'un call et d'un put : l'option call est l'option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d'échéance T, l'actif S à un prix maximal K. Si $S_T \leq K$, l'option aura donc une valeur nulle pour $t = T$. Si $S_T > K$, l'option vaudra $S_T - K$ pour $t = T$, c'est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu K et le prix effectif S_T de l'actif à la date T. Pour une option call, on a donc $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$, où x^+ vaut x si $x > 0$ et 0 sinon. L'option put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date T, l'actif S au prix minimum K. En examinant successivement les cas $S_T \geq K$ et $S_T < K$, il est facile de voir que $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$. Le nombre K s'appelle le *prix d'exercice* (ou *strike*) de l'option.

A l'instant $t = 0$ le portefeuille de couverture (a_0, b_0) doit satisfaire $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$, c'est-à-dire vérifier le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 120 + b_0 & = & a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 60 + b_0 & = & a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{array} \right. \tag{1.9}$$

On trouve immédiatement $a_0 = \frac{5}{8}$ et $b_0 = -25$ d'où $\Pi_0 = \frac{5}{8}80 - 25 = 25$. Le vendeur de l'option, dont le prix est $\Pi_0 = 25$, touche cette prime à l'instant initial, y ajoute un montant de 25 qu'il emprunte, le tout servant à acheter $\frac{5}{8}$ d'actifs à 80 pièce. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la baisse et que $S_{\delta t} = 40$, *on solde* le portefeuille ; la part en actifs ne vaut plus que $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8}40 = 25$, soit exactement de quoi rembourser la dette $b_0 = 25$. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la hausse et que $S_{\delta t} = 120$, nous avons vu dans l'exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$; comme il y a déjà $\frac{5}{8}$ d'actifs dans le portefeuille, il convient d'en *racheter* $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$ au prix unitaire $S_{\delta t} = 120$, donc pour une valeur de $\frac{10}{48}120 = 25$, que l'on emprunte, ce qui porte la dette totale à $25 + 25 = 50$, comme dans le premier exemple, bien entendu. Le vendeu a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu'à l'échéance sa valeur soit exactement celle de l'option (100, 0, ou 0 selon les valeurs de $S_{2\delta t}$) : c'est le principe de la couverture dynamique.

Remarque : On peut à présent comprendre pourquoi le méchanisme de couverture dynamique d'une option décrit dans cette leçon est fondamentalement différent de celui qui permet à un assureur de couvrir un risque de vol ou d'incendie : dans le cas d'une option, le vendeur peut (à supposer que le modèle mathématique qu'il a de la dynamique de l'actif sous-jacent soit réaliste) couvrir le risque d'un seul contrat, et même le couvrir exactement, c'est-à-dire le faire disparaître. Dans le cas d'une assurance

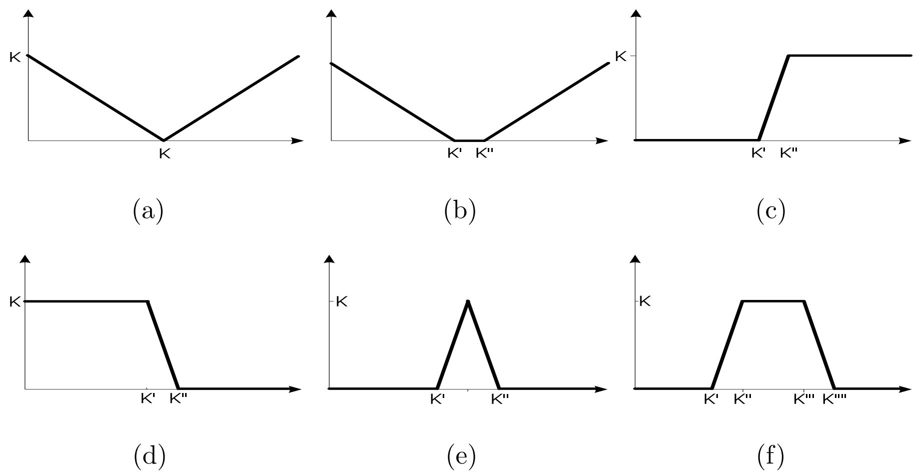


FIG. 1.5 – Fonctions de paiement (ou pay-off) de quelques options standard : (a) straddel, (b) strangel, (c) bull spread, (d) bear spread, (e) butterfly spread, (f) condor. Exercice : après avoir étudié la définition d'un call et d'un put, indiquer comment au moyen d'achat et de vente de call et de put on peut synthétiser les options définies par les pay-off de cette figure.

classique au contraire, l'assureur doit avoir vendu de nombreux contrats pour, en moyenne, pouvoir faire face à ses obligations, comptant sur le fait que la probabilité pour qu'un trop grand nombre de clients aient un sinistre simultanément est suffisamment faible : c'est une couverture du risque par diversification.

Une question naturelle que cette remarque peut susciter est la suivante : si le vendeur d'une option peut, grace à la couverture dynamique, supprimer le risque, pourquoi l'acheteur ne couvre-t-il pas lui-même ce risque ? Quand au vendeur, s'il ne gagne rien à le faire, pourquoi le fait-il ? La réponse est que, dans la pratique, la couverture dynamique nécessitant un travail au jour le jour de surveillance des cours et d'ajustement de son portefeuille, est, bien entendu, rémunérée, même si nous n'en avons pas tenu compte dans les calculs ci-dessus ; l'acheteur, quant à lui, n'a pas nécéssairement envie d'assumer ce travail, d'autant qu'il subsiste une part de risque pour le vendeur si le modèle mathématique utilisé pour faire les calculs est trop grossièrement faux.

Remarque : Il est utile également d'observer ce qui se passe si le vendeur de l'option ne la couvre pas, soit qu'il n'achète aucun portefeuille de couverture avec la prime, soit qu'il achète bien, à la date initiale, le portefeuille (a_0, b_0) adapté mais ne le réajuste plus avant l'échéance. Examinons la question dans le cas de l'exemple : avec 5/8ième d'actif S_t et une dette de 25, le portefeuille acheté à la date initiale vaut à la date finale, si sa composition n'a pas été modifié dans l'intervalle, respectivement :

- $\frac{5}{8}180 - 25 = 87,5$, si le sous-jacent prend la valeur 180 ; or le vendeur doit dans ce cas 100 à l'acheteur.
- $\frac{5}{8}60 - 25 = 12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 60 ; mais le vendeur ne doit rien à l'acheteur dans ce cas, il n'a donc pas de problème.
- $\frac{5}{8}20 - 25 = -12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 20 ; ici encore le vendeur ne doit rien à l'acheteur mais il garde une dette de $12,5$.

On voit donc sur cet exemple qu'il peut se révéler désastreux de ne pas assurer complètement la couverture dynamique.

.

Chapitre 2

Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein

L'objet de cette leçon est de généraliser le calcul du prix d'une option d'un modèle à une ou deux étapes à un modèle à n étapes, appelé *modèle de Cox, Ross et Rubinstein* ou *modèle binomial.* Cela conduira à une formule générale de prix d'option, appelée *formule fondamentale* que l'on obtient grâce à l'introduction de la *probabilité risque-neutre*, une probabilité permettant le calcul du prix d'un portefeuille de couverture. Ce sera aussi l'occasion d'aborder la notion d'*opportunité d'arbitrage.*

2.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le marché financier que nous considérons est un marché financier très simple qui comporte 2 actifs, un actif risqué (par exemple une action ou un indice), dont la valeur est notée S_t sur lequel sera souscrit l'option, et un actif non risqué (par exemple un dépot d'argent sur un compte rémunéré), dont la valeur est notée B_t.

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein ont proposé en 1979[1]de modéliser l'évolution du prix d'un actif de la façon suivante :

- Pour une suite finie de n instants régulièrement répartis entre 0 et T, $\mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (supposé petit), la valeur $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné S_0 à l'instant $t = 0$, et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant $t \in \mathbb{T}\backslash\{n\delta t\}$ est S_t, alors sa valeur à l'instant $t + \delta t$ sera soit $S_t u$ soit $S_t d$, où u et d sont des constantes qu'on supposera telles que $0 < d < u$. Donc $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ évolue sur un *arbre binaire* qui, à tout instant $t = k\delta t \in \mathbb{T}$, présente $k + 1$ noeuds ou $k + 1$ valeurs possibles égales à :

$$\{S_0 u^j d^{k-j}, j = 0, \ldots, k\}$$

  l'indice j représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = k\delta t$ (j est nombre de “up”), l'ordre des “up” et des “down” n'important pas.
- Pour la même suite d'instants $\mathbb{T}$, l'actif non risqué vaut $B_0 = 1$ à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence $B_t = B_{t-\delta t} e^{r\delta t}$, soit $B_t = e^{rt}$, où r désigne le taux d'escompte monétaire qu'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période $[0, T]$.

[1]Ce modèle fait suite à un modèle introduit en 1971 indépendement par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrète revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux *Capital Asset Pricing Model* (1964). Nous montrerons dans une leçon ultérieure les liens entre les deux approches, discrete et continue. L'approche en temps continu présente des avantages de calcul indéniables une fois que l'on maîtrise ce calcul. Mais l'approche discrète exposée ici, au dela de ses vertus pédagogiques, est parfois plus à même de modéliser des situations subtiles pour lesquelles l'approche continue peut se révèler trop limitative. Remarquons que la question du calcul des prix d'options peut également être abordée au moyen d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple le livre de P. Wilmott, S. Howison, et J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives,* Cambridge University Press (1995)). Le lien entre les deux approches, équations aux dérivées partielles/modèles aléatoires continus, est aujourd'hui bien compris.

2.2 Construction du portefeuille de couverture

On considère un call européen, souscrit sur l'actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$, d'échéance $T = n\delta t$ et de prix d'exercice K. Il s'agit donc du droit d'acheter l'actif S_t à la date T au prix K. La valeur de cette option à l'instant final (son paye off) est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ = \mathrm{Max}\,(S_T - K, 0) \tag{2.1}$$

c'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut $S_0 u^j d^{n-j}$ à l'instant final, pour un certain $j \in \{0, \ldots, n\}$, le call vaudra $C_T = (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$ pour ce même j.

Pour calculer, à partir de ces données, le prix du call à l'instant initial nous allons reprendre l'idée développée dans le cas des modèles à une et deux étapes, qui consiste à prendre pour prime de l'option la valeur initiale d'un portefeuille qui couvre l'option, c'est-à-dire dont la même valeur soit précisément celle de l'option à l'instant final. Comme pour le modèle à une ou deux étapes, nous cherchons pour définir le portefeuille Π_t par une relation de récurrence *rétrograde* ("backward") de manière à lier les inconnues Π_0, a_0, et b_0, prix initial et composition initiale, à la donnée de son paye off $(S_T - K)^+$. Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date t, lorsque le sous-jacent prend la valeur S_t, le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent S_t, et d'une certaine quantité de placement non-risqué B_t. Comme sa composition a été arrêtée à l'instant $t - \delta t$ (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que $S_{t-\delta t}$, et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date t, nous choisissons de la noter

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

Ce choix de notation est important. On a donc :

$$\delta\Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t) - (a_{t-\delta t}S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t}B_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t}\delta S_t + b_{t-\delta t}\delta B_t \tag{2.2}$$

où δS_t et δB_t sont des notations pour les différences $S_t - S_{t-\delta t}$ et $B_t - B_{t-\delta t}$. On peut alors recomposer le portefeuille, ayant prit connaissance de la valeur atteinte par S_t, mais par construction le portefeuille devra être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date t devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, c'est-à-dire en vérifiant la relation :

$$a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t = \Pi_t = a_t S_t + b_t B_t \tag{2.3}$$

Nous reviendrons sur cette *relation d'autofinancement*. On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par S la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant t, par Π ($\Pi := \Pi_t = a_{t-\delta t}S_t + b_{t-\delta t}B_t$) celle correspondante du portefeuille et par B celle de B_t. Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain" Su et Sd, d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons Π^u et Π^d, supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition (a, b) comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcl} aSu + be^{r\delta t}B & = & \Pi^u \\ aSd + be^{r\delta t}B & = & \Pi^d \end{array}$$

qui se résoud immédiatement en

$$a = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{Su - Sd} \text{ et } b = e^{-r\delta t}\frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{B(u-d)}. \tag{2.4}$$

On pose alors $a_t = a$ et $b_t = b$ et on en déduit la valeur cherchée Π_t, par la formule $\Pi_t = a_t S_t + b_t B_t$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, toute option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est* duplicable, *c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

Preuve : On raisonne par récurence sur le nombre n d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape ; pour un modèle à n étapes, on remarque simplement que, comme S_t prend deux valeurs $S_0 u$ et $S_0 d$ à l'instant δt, ces deux valeurs sont chacunes les valeurs initiales d'un modèle à $n-1$ étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles de couverture $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ avec lesquels on peut alors calculer Π_0 (et donc C_0) comme dans un modèle à une étape. □

2.3 Probabilité risque neutre et formule fondamentale

Le calcul évoqué, bien que simple dans son principe, est lourd dans sa mise en oeuvre (résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations) ? Nous allons voir à présent comment on peut le simplifier grâce à l'introduction d'un formalisme probabiliste.

La remarque cruciale est la suivante : si l'on calcule la valeur du portefeuille $\Pi = aS + bB$ en utilisant les solutions (a, b) trouvées en (2.4), on voit facilement qu'on peut réécrire Π comme une fonction de Π^u et Π^d, sous la forme

$$\Pi = e^{-r\delta t}(p\Pi^u + q\Pi^d), \tag{2.5}$$

si l'on introduit les quantités

$$p := \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \text{ et } q := \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}. \tag{2.6}$$

Or il est facile de vérifier que ces quantités sont telles que $p + q = 1$ et que, si l'on suppose, ce que nous ferons désormais, que $0 < d < e^{r\delta t} < u$, ces quantités p et q vérifient aussi $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Donc si l'on considère que Π^u et Π^d sont les deux valeurs que peut prendre une v.a. de Bernouilli Π avec $P(\Pi = \Pi^u) = p$ et $P(\Pi = \Pi^d) = q$ alors l'équation (2.5) affirme simplement que Π est précisement le produit par le *facteur d'actualisation*, $e^{-r\delta t}$, de l'espérance de cette v.a., c'est-à-dire *l'espérance actualisée* de cette v.a.. Les valeurs p et q ainsi définies se calculent directement en fonction de u, d et r, donc à partir des données du modèle choisi $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Mais elles ont aussi une autre propriété essentielle : on a en effet

$$S = e^{-r\delta t}(pSu + qSd), \tag{2.7}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$S_{t-\delta t} = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_t \text{ connaissant } S_{t-\delta t}).$$

On appelle *probabilité risque-neutre* la probabilité $(p, 1 - p)$ et c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options, directement et sans recourir à la résolution d'un grand nombre de petits systèmes linéaires. On la désigne aussi sous le nom de *probabilité de calcul*, ou encore *probabilité de martingale* pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons.

La probabilité risque-neutre permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent (S_t) d'une structure de *marche aléatoire*, c'est-à-dire que, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, les $k + 1$ valeurs $\{S_0u^jd^{k-j}, j = 0, \dots, k\}$ que peut prendre S_t sont les $k + 1$ valeurs possibles d'une v.a. dont la loi est donnée par :

$$P(S_t = sS_0u^jd^{k-j}) = \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) p^j(1 - p)^{k-j}. \tag{2.8}$$

En effet la valeur $S_0u^jd^{k-j}$ atteinte par S_t correspond à une trajectoire qui présente j “montées” et $k - j$ “descentes” dont la probabilité est $p^j(1 - p)^{k-j}$ si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements, à la hausse ou à la baisse, sont indépendants, et il est facile de voir qu'il y a exactement $\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right)$ trajectoires qui atteignent cette valeur. La formule (2.8) explique le nom de modèle binomial que l'on donne souvent au modèle Cox-Ross-Rubinstein. On a la proposition suivante que l'on obtient par un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition précédente, en utilisant la relation de récurrence retrograde (2.5) et (2.6), ainsi que les propriétés des coefficients du binôme :

Proposition 2.2 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est donnée par*

$$e^{-rT}\mathbb{E}(\varphi(S_T)) = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) p^j(1 - p)^{n-j}\varphi(S_0u^jd^{n-j}) \tag{2.9}$$

c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement ; ainsi, pour une option call, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (S - K)^+$, on a

$$C_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) p^j(1 - p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j} - K)^+$$

et pour le cas d'un put, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (K - S)^+$, on a

$$P_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) p^j(1 - p)^{n-j}(K - S_0u^jd^{n-j})^+.$$

La formule (4.3) s'appelle la *formule fondamentale* pour l'évaluation du prix d'une option européenne dans un modèle de Cox, Ross, et Rubinstein.

Exemple : Si l'on revient à l'exemple de modèle à deux étapes donné à la leçon précédente, le calcul de la prime C_0 peut se faire à présent simplement : on détermine la probabilité de calcul définie par la relation $S = pSu + (1-p)Sd$ (on a supposé $r = 0$) ; on obtient $p = \frac{1}{2} = 1 - p$; puis on calcule C_0 comme l'espérance $C_0 = 100P(S_T = 180) + 0P(S_T = 60) + 0P(S_T = 20) = 100(\frac{1}{4}) = 25$.

Remarque : Notons que si la formule fondamentale donne immédiatement le prix de l'option, elle ne donne pas directement la composition du portefeuille de couverture.

2.4 Hypothèses du modèle

La formule fondamentale ci-dessus (formule (4.3) a été obtenue sous l'hypothèse explicite que le modèle choisi pour la dynamique de l'actif sous-jacent est le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein. Mais il y a en fait d'autres hypothèses, économiques, qui ont été faites implicitement, et que nous allons étudier à présent.

- La plus irréaliste, mais difficilement contournable, est celle que l'on appelle l'hypothèse de *marché parfait.* Elle suppose d'une part que le marché est *infiniment liquide : à* tout instant, il existe des acheteurs et des vendeurs pour tous les titres du marché ; elle suppose aussi qu'il n'y a aucune contrainte sur les quantités d'actifs achetés ou vendus (opérations nécessaires pour assurer la couverture dynamique des options) ; en particulier, les titres sont supposés infiniment divisibles, et les agents sans de limitation de découvert. Enfin un marché parfait suppose aussi l'absence de coûts de transaction ainsi que l'égalité des prix à l'achat et à la vente (pas de fourchette bid-ask).
  L'hypothèse de marché parfait est une hypothèse théorique, évidemment non satisfaite dans la pratique, qu'il convient de considérer comme "satisfaite en première approximation", un peu comme l'hypothèse de gaz parfait en physique. Les modèles mathématiques plus élaborés que le modèle CRR cherchent parfois à s'en affranchir sur tel ou tel aspect. Mais il faut reconnaître que, pour l'essentiel, on ne sait pas le faire aujourd'hui de façon satisfaisante et qu'il reste beaucoup à améliorer dans cette direction.
- La seconde hypothèse est celle, déja mentionnée, de *taux d'escompte monétaire constant.* Nous avons par exemple supposé qu'un actif valant S_t à l'instant t a une valeur actuelle, en $t = 0$, égale à $e^{-rt}S_t$. Or, durant la période $[0, t]$, le taux d'escompte varie en réalité et ce qui pourrait être une approximation raisonnable si t était très petit, cesse d'être valable lorsque t devient appréciable. Les modèles plus élaborés font parfois l'hypothèse d'un taux d'escompte stochastique et on peut alors, moyennant le choix d'un modèle mathématique pour la dynamique des taux, intégrer dans la probabilité de calcul, et donc dans l'évaluation des prix d'option par la formule fondammentale, la présence de taux variables.
- La troisième hypothèse est l'*absence de dividendes* versés par les actifs sous-jacents. En fait, il existe des modèles analogues au modèle CRR qui autorisent la prise en compte de dividende.
- La dernière hypothèse est probablement la plus importante : elle porte le nom d'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage* (simplement notée AOA) et joue un rôle essentiel.

  Définition : Une opportunité d'arbitrage est un portefeuille autofinançant nul en $t = 0$ ($\Pi_0 = 0$) et tel que $\Pi_T \geq 0$ dans tous les états du monde et $P(\Pi_T > 0) > 0$.

  Proposition 2.3 *Dans un marché dans lequel on fait l'hypothèse d'AOA, deux portefeuilles qui ont la même valeur à une date future T, ont la même valeur à toutes dates intermédiaires $0 < t < T$.*
  En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait former un portefeuille composé du premier Π_t(en crédit), du second $-\tilde{\Pi}_t$ en débit, et d'une somme d'argent égale à la différence $\alpha := \Pi_t - \tilde{\Pi}_t$ placée au taux r. Si par exemple on suppose, par l'absurde, $\alpha > 0$, alors ce portefeuille est une opportunité d'arbitrage :

$t \in [0, T[$	T
Π_t	Π_T
$-\tilde{\Pi}_t$	$-\tilde{\Pi}_T$
α	$\alpha e^{r(T-t)}$
0	> 0

  L'hypothèse d'AOA permet aussi de justifier les inégalités qui ont été supposées satisfaites par l'actif risqué du modèle CRR :

$$0 < d < e^{r\delta t} < u. \tag{2.10}$$

En effet comme $e^{r\delta t}$ est le rendement $\frac{B_t}{B_0}$ de l'actif non risqué durant le laps de temps δt, et comme d et u sont les deux rendements possibles $\frac{S_t}{S_0}$ de l'actif risqué sur le même laps de temps, si l'on avait $d < u < e^{r\delta t}$ par exemple, on aurait une opportunité d'arbitrage :

t	$t + \delta t$
$-S_t$	$-S_t d$ ou $-S_t u$
α	$\alpha e^{r\delta t}$
0	$S_t(e^{r\delta t} - d)$ ou $S_t(e^{r\delta t} - u)$

Car si α est une somme d'argent égale à S_t et placée au taux r, le portefeuille représenté dans ce tableau est une opportunité d'arbitrage. On raisonnerait de façon analogue dans le cas $e^{r\delta t} < d < u$, avec $+S_t$ et $-\alpha$.

Remarque : Une opportunité d'arbitrage est parfois appelée un *free lunch* (et l'hypothèse d'AOA, *no free lunch*), ce qui résume l'idée que sous cette hypothèse il n'y a pas de possibilité de gagner d'argent à coup sûr, c'est-à-dire sans prendre de risque.

Remarque : C'est encore un raisonnement d'AOA qui rend plausible l'unicité du prix de l'option. En effet nous avons choisi pour prix de l'option celui d'un portefeuille de couverture. Mais pourquoi n'y aurait-il pas une autre façon de s'y prendre qui conduirait à un prix différent, disons un prix moindre par exemple ? En réalité ce n'est pas possible car si tel était le cas, un portefeuille comprenant l'option, vendue à un prix C_0 strictement inférieur au prix du portefeuille de couverture Π_0, le portefeuille de couverture lui-même en débit et une somme $\Pi_0 - C_0$, serait une opportunité d'arbitrage comme l'indique le tableau suivant :

$t = 0$	$t = T$
C_0	C_T
$-\Pi_0$	$-\Pi_T$
$\Pi_0 - C_0$	$(\Pi_0 - C_0)e^{rT}$
0	> 0

Enfin une conséquence de l'AOA, importante dans la pratique, est la *relation de parité call-put :*
Proposition 2.4 *Considérons un call C_t et un put P_t souscrits sur le même actif sous-jacent S_t, de même date d'échéance T et même prix d'exercice K. On a la relation de parité call-put suivante :*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{r(T-t)}$$

Preuve : On applique la proposition 2.3 : les portefeuilles $\Pi_t := C_t - P_t$ et $\tilde{\Pi}_t := S_t - Ke^{r(T-t)}$ ont même valeur à l'échéance $t = T$ puisque l'on a $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$. $\square$

.

Chapitre 3

Marches aléatoires. Filtration et information

A coté des modèles dynamiques *déterministes*, c'est-à-dire pour lesquels les quantités étudiées ont une évolution gouvernée par une équation différentielle ou une équation récurrente dont la connaissance fournit une prédiction *certaine* de ses valeurs futures, il existe des modèles dynamiques *stochastiques*, souvent plus pertinents ; les plus simples sont les *marches aléatoires* qui font l'objet de cette leçon. Dans le cas d'une marche aléatoire, l'évolution future d'une quantité observée, le cours d'un titre, un indice, un taux, n'est plus constituée d'une trajectoire unique mais de n trajectoires possibles dont une seule se réalisera. L'ensemble des trajectoires possibles est muni d'une probabilité qui pourrait représenter la probabilité que la trajectoire se réalise, mais ce ne sera pas notre point de vue ici, et qui représentera le prix ou le coût qu'il convient d'attacher à la réalisation de cette trajectoire en terme de risque : c'est le point de vue auquel nous a conduit l'introduction de la probabilité de calcul.

3.1 Définitions et exemples

Définition : Soient Ω un ensemble fini, $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$, $(\Omega, P, \mathcal{F})$ une espace probabilisé fini et soit $\mathbb{T} = \{0, \delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (petit). On appelle *marche aléatoire (finie)* une application (X) mesurable

$$X : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$$

Oublions provisoirement l'adjectif "mesurable" dont nous préciserons le sens plus loin et étudions tout d'abord un exemple :

Exemple : Le modèle CRR que nous avons déjà étudié fournit un premier exemple de marche aléatoire : elle modélise la dynamique de l'actif sous-jacent à une option. L'espace probabilisé fini Ω considéré est l'ensemble à 2^n élements $\Omega = \{-1, 1\}^n$; un évènement $\omega \in \Omega$ est une suite finie de ± 1 qui représentent la succession des n mouvements vers le haut (up) ou vers le bas (down) de l'actif. En introduisant la probabilité de calcul, nous avons posé, pour un $\omega \in \Omega$ qui comporte j composantes égales à $+1$ (et $(n-j)$ égales à -1),

$$P(\omega) := p^j (1-p)^{n-j},$$

faisant implicitement une hypothèse d'indépendance des accroissements sur laquelle nous reviendrons. La tribu $\mathcal{F}$ est ici simplement la tribu pleine $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. La marche aléatoire CRR, notée (S) est définie sur $\Omega \times \mathbb{T}$ par la formule suivante, lorsque ω comporte j composantes égales à $+1$ et $t = i\delta t$:

$$(\omega, t) \mapsto S_t(\omega) : := S_0 u^j d^{i-j}.$$

Il y a deux façons de voir une marche aléatoire (X) et c'est précisément ce qui fait la richesse de cette notion :

1. Si on fixe un $\omega \in \Omega$, l'application $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui à $t \in \mathbb{T}$ associe $X_t(\omega)$ est une fonction de t qu'on appelle la *trajectoire* de l'*état du monde* ω et qui représente l'une des évolutions au cours du temps

de la quantité modélisée, celle qui correspond à ω. On peut munir chaque trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ d'une probabilité en posant

$$P(t \mapsto X_t(\omega)) := P(\overline{\omega})$$

où $\overline{\omega}$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui conduisent à la même trajectoire. Une marche aléatoire peut donc être vue comme *un espace probabilisé de trajectoires*. Par exemple dans le modèle CRR à $n = 3$ étapes, l'espace Ω comporte 8 évènements élémentaires, $\omega_1 = (+1, +1, +1)$, $\omega_2 = (+1, +1, -1)$, $\omega_3 = (+1, -1, +1)$, $\omega_4 = (+1, -1, -1)$, $\omega_5 = (-1, +1, +1)$, $\omega_6 = (-1, +1, -1)$, $\omega_7 = (-1, -1, +1)$, et $\omega_8 = (-1, -1, -1)$ et il y a 8 trajectoires notées γ_i :

$$\begin{array}{lcl}
\gamma_1 & = & \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 u)\ ; (2\delta t, S_0 u^2)\ ; (3\delta t, S_0 u^3)\big) \\
\gamma_2 & = & \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 u)\ ; (2\delta t, S_0 u^2)\ ; (3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_3 & = & \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 u)\ ; (2\delta t, S_0 ud)\ ; (3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_4 & = & \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 u)\ ; (2\delta t, S_0 ud)\ ; (3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_5 & = & \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 d)\ ; (2\delta t, S_0 ud)\ ; (3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_6 & = & \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 d)\ ; (2\delta t, S_0 u^2)\ ; (3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_7 & = & \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 d)\ ; (2\delta t, S_0 d^2)\ ; (3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_8 & = & \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 d)\ ; (2\delta t, S_0 d^2)\ ; (3\delta t, S_0 d^3)\big)
\end{array}$$

2. Si on fixe un $t \in \mathbb{T}$, l'application $\Omega \to \mathbb{R}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire ; la marche aléatoire définit donc pour chaque t une v.a.. On peut donc aussi voir une marche aléatoire comme *une famille à un paramètre t* de v.a.. Dans l'exemple du modèle CRR à 3 étapes, ces v.a. sont S_0 (qui est la v.a. certaine égale à la constante S_0), $S_{\delta t}$, $S_{2\delta t}$ et $S_{3\delta t}$ dont les lois sont données respectivement par les tableaux suivants :

$S_{\delta t}$	$S_0 d$	$S_0 u$
$P(S_{\delta t} = \cdot)$	$(1-p)$	p

$S_{2\delta t}$	$S_0 d^2$	$S_0 du$	$S_0 u^2$
$P(S_{2\delta t} = \cdot)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$S_{3\delta t}$	$S_0 d^3$	$S_0 d^2 u$	$S_0 du^2$	$S_0 u^3$
$P(S_{3\delta t} = \cdot)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

3.2 La marche de Wiener et ses dérivées

La marche aléatoire la plus utilisée est la marche de Wiener dont l'importance tient notamment au fait que sa "limite" quand δt tend vers 0 est le fameux *processus stochastique* appelé mouvement brownien. On va définir la marche de Wiener au moyen de ses accroissements.

Définition : Soit (X) une marche aléatoire (m.a.). On appelle *accroissements* de (X) la marche aléatoire définie pour tout $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ par

$$\delta X_t := X_t - X_{t-\delta t}$$

Définition : Une m.a. (X) est dite à *accroissements indépendants* si elle est telle que les v.a. $(\delta X_t, t \in \{\delta t, \ldots, n\delta t\})$ forment une famille de v.a. indépendantes.

La plupart des m.a. que nous étudierons auront la propriété d'être à accroissements indépendants. C'est le cas par exemple de la marche CRR. A noter que, par contre, la m.a. CRR elle-même, c'est-à-dire la famille $(S_t, t \in \{0, \delta t, \ldots, n\delta t\})$, n'est pas une famille de v.a. indépendantes : ce qui est vrai pour ses accroissements n'est pas vrai pour la marche elle-même.

Notons aussi que la donnée d'une m.a. (X) à accroissement indépendants équivaut à la donnée de sa valeur à l'instant $t = 0$ et de la m.a. de ses accroissements (δX).

Définition : Soient $\Omega = \{-1, +1\}^n$, $0 < p < 1$ et $\delta t > 0$ un réel fixé. On appelle *p-marche de Wiener* (ou simplement *marche de Wiener* lorsque $p = \frac{1}{2}$) la m.a. à accroissements indépendants définie pour tout $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} W_0 & = & 0 \\ \delta W_t & = & \pm\sqrt{\delta t} \end{array} \right. \qquad (3.1)$$

avec $P(\delta W_t = \sqrt{\delta t}) = p$ et $P(\delta W_t = -\sqrt{\delta t}) = 1 - p$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}(\delta W_t) = (2p-1)\sqrt{\delta t}$ et $\mathrm{Var}\,(\delta W_t) = 4p(1-p)\delta t$ (et donc $\mathbb{E}(\delta W_t) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(\delta W_t) = \delta t$ pour $p = \frac{1}{2}$).

A partir de la marche de Wiener, on peut définir d'autres marches aléatoires :

Définition : On appelle *p-marche de Wiener avec dérive* la marche aléatoire définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & x_0 \\ \delta X_t & = & \mu\delta t + \sigma\delta W_t, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

et *p-marche de Wiener géométrique* la marche aléatoire définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & x_0 \\ \delta X_t & = & X_{t-\delta t}(\mu\delta t + \sigma\delta W_{t-\delta t}). \end{array} \right. \tag{3.3}$$

En fait la marche de Wiener géométrique est un exemple de marche CRR pour laquelle $u = 1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}$ et $d = 1 + \mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}$. On pourra vérifier facilement que si $r = \mu$, les inégalités $0 < d < e^{r\delta t} < u$ sont satisfaites pourvu que δt soit suffisamment petit.

3.3 Filtration et information

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment associer à toute marche aléatoire une filtration et pourquoi il est naturel de considérer que cette filtration, comme le font souvent les praticiens en finance, représente l'information disponible sur le marché à un instant donné.

Soient Ω^1,..., Ω^m des parties non vides de Ω. On dit que $\mathfrak{P} := \{\Omega^1, \ldots, \Omega^m\}$ est une *partition* de Ω si et seulement si les Ω^i sont deux-à-deux disjoints et Ω est la réunion des Ω^i.

La relation $\sim$ sur Ω définie par $\omega' \sim \omega$" si et seulement si ω' et ω" appartiennent à un même $\Omega^i \in \mathfrak{P}$ est une relation d'équivalence. Réciproquement, si $\sim$ est une relation d'équivalence quelconque sur Ω, les classes d'équivalences $\overline{\omega} = \{w' \in \Omega \mid \omega' \sim \omega\}$ des éléments de Ω consituent une partition de Ω.

Définition : Lorsque Ω est l'espace probabilisé sous-jacent à une marche aléatoire (X), on peut définir sur Ω, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, des partitions, que nous noterons $\mathfrak{P}_t$, associées à la marche aléatoire, par la relation d'équivalence $\overset{t}{\sim}$ suivante :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega\text{"} \quad \text{si et seulement si } X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega\text{"}) \text{ pour tout } \tau \in [0..t]$$

En d'autres termes, deux états du monde sont é*quivalents jusqu'à l'instant* t si les trajectoires qui leurs sont associées coïncident jusqu'à l'instant t.

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on a :
- si $t = 0$, $\mathfrak{P}_0 \;= \{\Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathfrak{P}_{\delta t} \;= \{\Omega^1 = \{w_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega^2 = \{w_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathfrak{P}_{2\delta t} \;= \{\Omega^{11} = \{w_1, \omega_2\}, \Omega^{12} = \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega^{21} = \{w_5, \omega_6\}, \Omega^{22} = \{\omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathfrak{P}_{3\delta t} \;= \{\{w_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{w_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}\}$.

Définition : Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{F}$ une tribu de parties de Ω. On appelle *atome* de $\mathcal{F}$ tout élément de $\mathcal{F}$ qui ne contient pas d'autre élément de $\mathcal{F}$ que lui même et l'ensemble vide.

On démontre facilement la proposition suivante en appliquant les définitions de partition et de tribu :

Proposition 3.1 *Dans un ensemble Ω fini, on peut associer à toute partition $\mathfrak{P}$ la tribu engendrée par les éléments Ω^i de la partition et réciproquement on peut associer à toute tribu la partition formée par ses atomes.*

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on peut associer à chaque partition $\mathfrak{P}_t$, une tribu, notée $\mathcal{F}_t$:
- si $t = 0$, $\mathcal{F}_0 \;= \{\phi, \Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathcal{F}_{\delta t} \;= \{\phi, \Omega^1, \Omega^2, \Omega\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathcal{F}_{2\delta t} \;= \{\phi, \Omega^{11}, \Omega^{12}, \Omega^{21}, \Omega^{22}, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^{11} \cup \Omega^2, \ldots, \Omega\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathcal{F}_{3\delta t} \;= \mathcal{P}(\Omega)$.

Et on a évidemment $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \mathcal{F}_{2\delta t} \subset \mathcal{F}_{3\delta t}$. Cette suite croissante de tribus est appelée une *filtration.*

En généralisant l'exemple précédent, on comprend facilement qu'il est possible d'associer à toute marche aléatoire (X) une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définie de la façon suivante : pour un t donné, les atomes de la tribu $\mathcal{F}_t$ sont constitués des états du monde $\omega \in \Omega$ auxquels sont associés des trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant t.

Lorsque $t = 0$, l'information dont on dispose est que l'un des états du monde $\omega \in \Omega$ va se réaliser (mais on ne sait pas lequel). A l'instant $t = \delta t$, l'actif que l'on modélise à fait soit un mouvement vers le haut soit un mouvement vers le bas et donc on sait, ayant pu observer cette évolution, que l'état du monde qui se réalisera appartient à Ω^1 ou bien à Ω^2. Et à l'instant $t = 2\delta t$, on saura qu'il appartient à Ω^{11}, Ω^{12}, Ω^{21} ou Ω^{22}, et ainsi de suite. A chaque nouvelle étape l'information dont on dispose sur l'actif observé augmente et on peut mesurer la finesse de cette information par la partition $\wp_t$ ou bien, ce qui revient au même, par la tribu $\mathcal{F}_t$. La suite de ces tribus, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ représente donc *l'information dont on dispose à la date t en observant le marché.*

La raison pour laquelle on parle plus souvent de la filtration des tribus $\mathcal{F}_t$ plutot que de la famille des partitions $\wp_t$ est que, lorsqu'on voudra remplacer les modèles finis étudiés ici par des modèles continus, où Ω est supposé infini, la filtration continuera à être bien définie alors que la partition ne le sera plus.

Chapitre 4

Espérance conditionnelle

Dans les leçons précédentes nous avons appris à calculer le prix de diverses options à l'instant $t = 0$. Les options étant des actifs financiers négociables, qu'on veut pouvoir acheter et vendre aussi à des instants ultérieurs, on voudrait également savoir calculer leur prix à des instants $t > 0$. C'est ce que nous allons faire dans cette leçon grâce à la notion d'*espérance conditionnelle par rapport à une tribu.* On découvrira au passage que cette espérance conditionnelle, qui généralise l'espérance conditionnelle usuelle d'une variable aléatoire par rapport à un évènement, est en fait un extraordinaire outil de calcul, un de ceux qui font que la théorie des probabilités s'appelle souvent le *calcul* des probabilités.

4.1 Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement

Voici tout d'abord quelques rappels de probabilités élémentaires. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé que nous supposerons comme précédemment *fini* et satisfaisant en outre la condition suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, P(\omega) \neq 0.$$

Soit X une variable aléatoire sur Ω. L'espérance de X est le *nombre* $\mathbb{E}\,(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$. Notons que, pour tout évènement $A \subseteq \Omega$ appartenant à la tribu $\mathcal{T}$, on peut exprimer la probabilité de A comme l'espérance d'une v.a., en posant $P(A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha) = \mathbb{E}\,\mathbb{I}_A$, où $\mathbb{I}_A$ désigne l'indicatrice de A, égale à 1 sur A et 0 sinon.

Plus généralement, on appelle “espérance de X sachant A” ou “espérance de X conditionnellement à A”, le *nombre*, notée $\mathbb{E}(X/A)$, donné par

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{\alpha \in A} X(\alpha)P(\alpha) = \frac{\mathbb{E}\,X\mathbb{I}_A}{\mathbb{E}\,\mathbb{I}_A}.$$

En d'autres termes $\mathbb{E}(X/A)$ est la moyenne, pondérée par les probabilités des éléments de A rapporté à la probabilité de A, des $X(\alpha)$ pour $\alpha \in A$.

Nous insistons sur le fait que l'espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement est un nombre. L'espérance conditionnelle par rapport à une tribu, que nous allons introduire à présent, n'est pas *un* nombre, mais “un nombre qui dépend de l'état du monde”, c'est-à-dire une variable aléatoire.

4.2 Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport à une tribu

Soient $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ une tribu et $\mathfrak{P} := \{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}$ la partition de Ω formée par les atomes de $\mathcal{F}$.

Définition : Soit X est une v.a. sur Ω. On appelle *espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$*, ou encore *espérance conditionnelle de X relativement à la partition* $\mathfrak{P}$, la v.a. notée $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{F})(\omega) := \mathbb{E}[X/\overline{\omega}] = \frac{1}{P(\overline{\omega})} \sum_{\alpha \in \overline{\omega}} X(\alpha)P(\alpha)$$

où $\overline{\omega}$ désigne l'atome $\Omega_i \in \mathfrak{P}$ de la partition tel que $\omega \in \Omega_i$.

On voit donc que par définition l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu $\mathcal{F}$ est une v.a. constante sur les atomes Ω_i de la partition associée à $\mathcal{F}$. On a plus précisément :

Proposition 4.1 *La v.a. $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}$ et de plus si Y désigne cette v.a., ($Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$), alors Y peut être définie comme l'unique v.a. $\mathcal{F}$-mesurable telle que*

$$\forall \Omega_i \in \mathfrak{P} \quad , \quad \mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i). \tag{4.1}$$

Preuve : Le fait que $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ soit mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}$ est clair par définition puisqu'elle est constante sur les atomes de la partition $\mathfrak{P}$.

Montrons qu'elle vérifie l'équation (4.1) : on a

$$\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} Y(\alpha)P(\alpha) = \frac{1}{P(\Omega_i)} Y(\omega) \sum_{\omega \in \Omega_i} P(\omega) = Y(\omega)$$

où ω est un élément quelconque de l'atome Ω_i, puisque Y est constante sur les atomes. D'autre part, on a :

$$\mathbb{E}(X/\Omega_i) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} X(\alpha)P(\alpha) = Y(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega_i$, par définition de Y. Réciproquement si Y est $\mathcal{F}$-mesurable, la relation $\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i)$ définit Y uniquement car, pour tout $\omega \in \Omega$, on posera $Y(\omega) := \mathbb{E}(X/\Omega_i)$, où Ω_i est l'atome contenant ω. □

Voici les principales propriétés de l'espérance conditionnelle :

Proposition 4.2 *Soient X et Y des v.a. sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des sous-tribus de T, x_0, a et b des nombres réels. On a :*

1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{T}) = X$, *et* $\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X)$.
2. $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.
3. *Si* $X \geq 0$, *on a* $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$, *avec égalité si et seulement si* $X = 0$.
4. $\mathbb{E}(x_0|\mathcal{F}) = x_0$.
5. *Si* Y *est* $\mathcal{F}$*-mesurable, on a* $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
6. *Si* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, *on a* $\mathbb{E}(\ \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \ | \ \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. *En particulier* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$.

Cette sixième propriété s'appelle la transitivité des espérances conditionnelles. Elle est d'un usage fréquent en finance.

4.3 L'espace euclidien $L^2(\Omega)$

On désigne par $L^2(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires sur Ω dans le cas où on munit cet ensemble d'une structure euclidienne (c'est-à-dire d'un produit scalaire) que nous allons définir à présent. Cet espace de v.a. joue un rôle fondamental en économétrie et en calcul stochastique.

Tout d'abord, il est facile de munir l'ensemble des v.a. sur Ω d'une structure d'espace vectoriel : si X et Y sont deux éléments de cet ensemble, $X + Y$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX sont encore des v.a. sur Ω. D'autre part on peut définir un produit scalaire sur cet ensemble de la façon suivante :

$$< X, Y > := \mathbb{E}(XY) \tag{4.2}$$

et la norme associée par :

$$\|X\|^2 := \mathbb{E}(X^2)$$

En effet on vérifie facilement la bilinéarité et la symétrie ; de plus on a $\|X\| \geq 0$ puisque X^2 est une v.a. positive ou nulle ; enfin, si $\|X\| = 0$, alors $X = 0$ car $\mathbb{E}(X^2)$ est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs (puisque $P(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) des nombres positifs.

On vérifie sans peine que l'on a $\mathbb{E}(X) =< X, 1 >$, $Cov(X,Y) =< X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y) >$ et donc $Var(X) =< X - \mathbb{E}(X), X - \mathbb{E}(X) >= \|X - \mathbb{E}(X)\|^2$.

L'espace $L^2(\Omega)$ des variables aléatoires sur Ω, muni du produit scalaire (4.2), est donc bien un espace euclidien. On sait que dans un espace euclidien on peut associer à tout vecteur sa projection orthogonale sur un sous espace. Rappelons la définition de la projection orthogonale :

Définition : Soient $G \subseteq L^2(\Omega)$ un sous espace vectoriel et $X \in L^2(\Omega)$ un vecteur quelconque. On appelle *projection orthogonale* de X sur G, notée $\pi(X)$ l'unique élément de G tel que

$$\forall Z \in G \ , \ < X - \pi(X), Z >= 0$$

On peut vérifier facilement que si $\mathcal{F}$ est une tribu alors l'ensemble des v.a. de $L^2(\Omega)$ $\mathcal{F}$-mesurables forment un sous espace vectoriel. En effet, si X et Y sont deux v.a. $\mathcal{F}$-mesurables, donc constantes sur les atomes de la partition associée à la tribu $\mathcal{F}$, toute combinaison linéaires $\lambda X + \mu Y$, pour λ et μ réels quelconques, est encore $\mathcal{F}$-mesurable.

Proposition 4.3 *Soient X une v.a. et $\mathcal{F}$ une tribu. L'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\mathcal{F}$ est la projection orthogonale de X sur le sous espace G des v.a. $\mathcal{F}$-mesurables.*

Preuve : Soit $Z \in G$. En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle du théorème 4.2, on a :

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XZ/\mathcal{F}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F})Z)$$

donc $< X - \mathbb{E}(X/\mathcal{F}), Z >= \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F})Z) = 0$. □

4.4 Application au calcul de prix d'options

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une marche aléatoire et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ la filtration associée; rappelons que la filtration associée à une m.a. est par définition la suite croissante de tribus

$$\{\phi, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

définie de la façon suivante : pour chaque $t \in \mathbb{T}$,les atomes de la tribu $\mathcal{F}_t$ sont les classes d'équivalence pour la relation :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega" \text{ si et seulement si } X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega") \text{ pour tout } \tau \in [0..t].$$

Un exemple de la filtration associée à la marche CRR ést détaillé à la fin de la leçon 3.

On a vu ci-dessus comment associer à une v.a. X son espérance par rapport à une tribu, $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$. Si l'on dispose non plus d'une seule tribu mais de toute une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, on peut associer alors, à toute v.a. X, une famille, indéxée par $t \in \mathbb{T}$, de variables aléatoires $Y_t := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$, c'est-à-dire une nouvelle marche aléatoire $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Prenons l'exemple d'une option enropéenne standard $(T, \varphi(S_T))$ souscrite sur une actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. La fonction de paiement $X := \varphi(S_T)$ est une v.a. sur l'ensemble des états du monde Ω sur lesquel est définie la m.a. (S_t). On peut donc associer à l'option une nouvelle m.a. donnée par $Y_t := \mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$. Que représente Y_t par rapport à $X = \varphi(S_T)$? Pour chaque état du monde $\omega \in \Omega$, $Y_t(\omega)$ est l'espérance conditionnelle de X sachant $\overline{\omega}$, où $\overline{\omega}$ désigne l'atome de la tribu $\mathcal{F}_t$, c'est-à-dire l'ensemble des états du monde correspondant à des trajectoires de la marche (S_t) qui coïncident jusqu'à l'instant t. En d'autres termes, $Y_t(\omega)$ est la moyenne des paiements attendus sur toutes les trajectoires qui coïncident avec ω jusqu'à l'instant t, ou la moyenne des paiements futurs sachant la trajectoire S_t jusqu'à l'instant t, c'est-à-dire connaissant l'information jusqu'à t. Notons que l'on a $\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_T) = \varphi(S_T)$ et $\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\varphi(S_T))$.

Utilisant la notion d'espérance conditionnelle par rapport aux tribus d'une filtration, il est possible de calculer le prix d'une option, non seulement à l'instant $t = 0$ mais à tout instant $t \in \mathbb{T}$: c'est la *formule fondamentale* qui généralise celle donnée au chapitre 2 pour $t = 0$.

Proposition 4.4 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où l'actif risqué S_t suit un modèle CRR et l'actif sans risque est donné par $B_t := e^{rt}$, le prix d'une option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est la marche aléatoire $(C_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définie pour tout $t \in \mathbb{T}$ par*

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t) \tag{4.3}$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est la filtration associée à la m.a. CRR $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et où l'espérance conditionnelle est calculée sous la probabilité de calcul p définie par $p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$.

Une conséquence importante de cette proposition est que la m.a. $(C_t)_{t\in\mathbb{T}}$, prix de l'option à l'instant t selon les états du monde possède la propriété suivante : pour tout $t \in \mathbb{T}$, la v.a. C_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est la filtration associée à l'actif sous-jacent $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. On a même plus précisément l'existence d'une fonction (déterministe) $C(t, S)$ telle que $C_t = C(t, S_t)$, pour tout t et tout état du monde. On peut représenter le graphe de cette fonction comme un *filet*, c'est-à-dire une fonction définie au dessus de chaque noeud de l'arbre (t, S_t) formé des diverses valeurs prises par les trajectoires de la marche $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Sur la figure ci-dessous, on a représenté ce filet dans le cas d'une option Call ; on peut voir que sa section verticale à l'instant $t = T$ est bien le graphe du paye off d'un Call $(S - K)^+$ et sa section à l'instant $t = 0$ est un point C_0, l'écart vertical au point représentant S_0, d'ordonnée nul représentant la prime de l'option, c'est-à-dire son prix initial.

Chapitre 5

Martingales, arbitrage et complétude

La notion de martingale joue aujourd'hui un rôle central en finance mathématique[1] ; elle était déja présente dans la thèse de Louis Bachelier en 1900 mais elle n'a commencé à être étudiée systématiquement par les mathématiciens que vers 1940, notamment par P. Levy et J.L. Doob, et plus tard par l'école de probabilités de Strasbourg, notamment P.A. Meyer. Ce n'est qu'à la fin des années 70 et au début des années 80 (dans un séries d'articles de M. J. Harrison, D. M. Kreps et S. R. Pliska) que l'on a commencé à comprendre les liens entre les notions économiques ou financières d'absence d'oportunité d'arbitrage et de complétude du marché et la notion mathématique de martingale. Ce sont ces liens que nous étudions ici à travers notamment deux résultats importants parfois appelés les deux théorèmes fondamentaux de la finance mathématique.

5.1 Martingales

Intuitivement, une martingale est une marche aléatoire n'ayant ni tendance haussière ni tendance baissière, sa valeur à chaque instant étant égale à l'espérance de ses valeurs futures. On utilise des marches aléatoires ayant cette propriété pour modéliser le prix des actifs financiers car un prix de marché est un nombre sur lequel deux parties, celle qui achète et celle qui vend, tombent d'accord; si le prix avait une tendance à la hausse, le vendeur n'aurait pas accepté la transaction et inversement s'il avait une tendance à la baisse c'est l'acheteur qui l'aurait refusé. Donc il est naturel de supposer qu'un *fair-price* a la propriété de martingale. Cela n'entraine nullement que le prix ne varie pas car, selon l'état du monde qui se réalise, il augmente effectivement ou bien diminue. Mais lorsque l'on prend en compte l'ensemble des états du monde possibles, il est raisonnable de supposer que sa variation espérée est nulle. Bien sûr, les véritables variations du prix qui interviendront dans la réalité, et qui dépendent de l'état du monde, seront certainement non nulles. D'ailleurs, c'est parce que les deux parties n'ont pas les mêmes anticipations sur l'état du monde qui va se réaliser que la transaction a lieu.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé fini et soit $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration de Ω. On dit qu'une marche aléatoire $M := (M_t)_{t\in[0..T]_{\delta t}}$ est une $\mathcal{F}$-*martingale* (mtg) si et seulement si

$$\text{pour tous } s \leq t,\ M_s = \mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s). \tag{5.1}$$

Observons qu'il résulte de la définition de l'espérance conditionnelle qu'une $\mathcal{F}$-martingale est toujours une marche aléatoire $\mathcal{F}$-adaptée, c'est-à-dire que, pour tout t, la v.a. M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

La proposition suivante donne trois autres caractérisations de la propriété de martingale, souvent utiles, qui découlent également des propriétés de l'espérance conditionnelle. On utilise la notation $\mathbb{E}_s X := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s)$.

Proposition 5.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *M est une martingale.*
2. *Pour tout $s \in \mathbb{T}$, $M_s = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t})$.*
3. *Pour tout $s \in \mathbb{T}$, $\mathbb{E}_s(\delta M_{s+\delta t}) = 0$, où $\delta M_{s+\delta t} := M_{s+\delta t} - M_s$.*
4. *Pour tout $s \leq t$ dans $\mathbb{T}$, $\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = 0$.*

[1]Voir le livre de Nicolas Bouleau, *Martingales et marchés financiers*, Editions Odile Jacob, 1998

Preuve : On fait une démonstration "circulaire" : la propriété 1 entraine évidemment 2 et si la propriété 2 est vraie, on a :

$$\mathbb{E}_s(M_{s+\delta t} - M_s) = \mathbb{E}_s(M_{s+\delta t}) - M_s = M_s - M_s = 0.$$

D'où la propriété 3. Si celle-ci est vraie, alors

$$\mathbb{E}_s(M_t - M_s) = \mathbb{E}_s(\sum_{\tau=s}^{t-\delta t}(M_{\tau+\delta t} - M_\tau)) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t}\mathbb{E}(\delta M_{\tau+\delta t}) = \sum_{\tau=s}^{t-\delta t}\mathbb{E}_s(\mathbb{E}_\tau(\delta M_{\tau+\delta t})) = 0.$$

D'où la propriété 4. On vérifie enfin que la propriété 4 implique à son tour la propriété 1 car $M_s - \mathbb{E}_s(M_t) = \mathbb{E}_s(M_s - M_t) = 0$. □

Exemples :

1. Le premier exemple est celui de la p-marche de Wiener $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ pour laquelle on a par définition :

$$\mathbb{E}(\delta W_t) = p\sqrt{\delta t} + (1-p)(-\sqrt{\delta t}) = (2p-1)\sqrt{\delta t}.$$

   Donc c'est une martingale (par rapport à la filtration qui lui est associée) si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.
2. Le second exemple est celui de la marche aléatoire de Cox, Ross et Rubinstein $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ qui modélise le prix d'un actif financier à l'instant t. Pour trouver une probabilité $p = P(S_{t+\delta t}/S_t = u)$ telle que sa valeur actualisée soit une martingale, on procède de la façon suivante : si r désigne le taux d'escompte monétaire, supposé constant, et $\tilde{S}_t$ le prix actualisé, $\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t$, on a les relations suivantes que doit satisfaire p :

$$\mathbb{E}_t(\tilde{S}_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)}\mathbb{E}(S_{t+\delta t}) = e^{-r(t+\delta t)}(pS_tu + (1-p)S_td) = e^{-r\delta t}(pu + (1-p)d)\tilde{S}_t.$$

   Donc $\tilde{S}_t$ est une $\mathcal{F}$-martingaele pourvu que $pu + (1-p)d = e^{r\delta t}$. On retrouve la probabilité risque neutre introduite pour évaluer le prix d'options :

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}.$$

   Dans le modèle CRR, la probabilité risque neutre est donc l'unique probabilité pour laquelle la valeur actualisée de l'actif sous-jacent est une martingale.
3. Le troisième exemple est celui d'une martingale fermée par une v.a. : si Φ est une v.a. sur un espace probabilisé muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, la marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définie par $X_t := \mathbb{E}(\Phi/\mathcal{F}_t)$ est, par construction, une martingale. De façon générale, on dit qu'une $\mathcal{F}$-martingale M_t est une martingale *fermée par la v.a.* Φ si elle s'écrit $M_t := \mathbb{E}(\Phi/\mathcal{F}_t)$ pour une certaine v.a. Φ. C'est une façon naturelle de construire une martingale et c'est ce que nous avons fait à travers la fomule fondamentale pour la marche $\tilde{C}_t$. Nous avons vu en effet que

$$C_t = e^{r(T-t)}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$$

   ce qui s'écrit encore $e^{rt}C_t = \mathbb{E}(e^{rT}\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$. Ainsi la formule fondamentale indique qu'à tout instant t, le prix actualisé $\tilde{C}_t$ d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est la martingale fermée par la v.a. $\varphi(\tilde{S}_T)$.

Proposition 5.2 *Si $(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale, alors $t \mapsto \mathbb{E}(M_t)$ est constant et pour tout $t \in \mathbb{T}$ on a $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$. En particulier si M_0 est une v.a. constante, égale au nombre M_0, on a pour tout t, $\mathbb{E}(M_t) = M_0$.*

De cette proposition appliquée à la martingale $(\tilde{C}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, on déduit immédiatement que la valeur de la prime C_0 est l'espérance du paye off $\tilde{C}_T = \varphi(\tilde{S}_T)$.

Pour finir ce paragraphe, indiquons la definition de sur- et sousmartingale, utile notamment pour l'etude des options américaines.

Définition : On dit qu'une m.a. $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une *$\mathcal{F}$-sous[2]-martingale* si et seulement si X est $\mathcal{F}$-adaptée et

$$\text{pour tous } s \leq t,\ X_s \leq \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s). \tag{5.2}$$

On définit de façon analogue les *$\mathcal{F}$-surmartingales*. Evidemment une m.a. qui est à la fois une sur- et une sousmartingale est une martingale.

[2] retenir que toute valeur X_s de la marche est "sous" ($\leq$) l'espérance (conditionnelle) de toute valeur future ($\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$).

5.2 Marché et "pertes et profits" d'un portefeuille

Le fait que les valeurs actualisées des deux actifs (risqué et non risqué) qui composent le portefeuille de couverture d'une option soient des martingales entraine automatiquement, comme nous allons le voir maintenant, qu'il en est de même de la valeur du portefeuille. Ceci fournit d'ailleurs une nouvelle façon de se convaincre que la valeur actualisée de l'option (qui par définition est le prix d'un portefeuille de couverture) est une elle-même martingale.

Ce résultat important est en fait valable non seulement lorqu'on ne dispose que de deux actifs, l'un risqué et l'autre non risqué, mais plus généralement lorsque l'on dispose de $d+1$ actifs, d'où la généralisation proposée maintenant.

Définition : Un *marché financier* est la donnée de $(d+1)$ marches aléatoires $(S_t^1, \ldots, S_t^d\ ; B_t)$ définies sur le même espace probablisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, telles que :
- $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est déterministe (par exemple $B_t = e^{rt}$) : elle modélise un actif non risqué.
- $(S_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$, ..., $(S_t^d)_{t\in\mathbb{T}}$ sont $\mathcal{F}$-adaptées : elles modélisent d actifs risqués.

Pour définir la notion de portefeuille dans un tel marché financier, il est utile d'introduire la notion de marche aléatoire prévisible.

Définition : Une marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dite *prévisible par rapport à une filtration* $\mathcal{F}$ si, pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_{t-\delta t}$-mesurable.

Rappelons qu'une v.a. est $\mathcal{F}_{t-\delta t}$-mesurable lorsqu'elle *est connue* dès qu'on connait l'information dont on dispose à l'instant $t-\delta t$, information représentée par la tribu $\mathcal{F}_{t-\delta t}$. L'exemple typique de m.a. prévisible que nous considérerons est la m.a. α_t qui représente la composition en actif sous-jacent d'un portefeuille de couverture d'une option. En effet on supposera cette composition choisie à l'instant $t-\delta t$ au vu du prix atteint par l'actif sous-jacent à cet instant et maintenue inchangée jusqu'à l'instant t, date à laquelle le détenteur du portefeuille réajuste sa position au vu de la nouvelle valeur atteinte par l'actif sous-jacent à cette date.

Définition : On appelle *portefeuille* $\Pi = (\Pi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (ou *stratégie de portefeuille*) une famille de $d+1$ m.a. prévisibles $\Pi_t = (\alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^d\ ; \beta_t) = (\alpha_t\ ; \beta_t)$ et *valeur* du portefeuille (ou de la stratégie) Π la quantité

$$V_t^\pi = \alpha_t^1 S_t^1 + \ldots + \alpha_t^d S_t^d + \beta_t B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t$$

Il est utile d'introduire, à coté des prix des actifs ou des portefeuilles leurs *prix actualisés*, de façon à pouvoir comparer leurs valeurs à des instants t différents. On désigne par $\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}$ et $\tilde{V}_t^\pi := \frac{V_t^\pi}{B_t}$ ces valeurs actualisées. On a alors

$$\tilde{V}_t^\pi = \alpha_t \cdot \tilde{S}_t + \beta_t.$$

Remplacer dans les calculs les prix des actifs S_t^i par leurs valeurs actualisées $\tilde{S}_t^i$ correspond à ce que l'on appelle parfois "travailler en Euros constants" c'est-à-dire choisir comme numéraire le prix de l'actif non risqué B_t et donc exprimer les autres prix en fonction de celui-ci. On supposera aussi désormais que $B_0 = 1$.

Une propriété importante des portefeuilles que nous considérons, que possèdent notamment les portefeuilles destinés à couvrir une option, est d'être autofinancés, c'est-à-dire que, lors de la recomposition à chaque instant $t \in \mathbb{T}$, les modifications se font sans apport ni retrait de fonds. Cette propriété s'exprime par l'identité suivante :

Définition : Un portefeuille $\Pi_t = (\alpha_t\ ; \beta_t)$ est dit *autofinancé ssi* pour tout $t = \delta t, \ldots, T$, on a :

$$\alpha_{t-\delta t} \cdot S_t + \beta_{t-\delta t} B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t.$$

Une autre façon d'évaluer la valeur d'un portefeuille autofiancé est d'étudier ses "pertes et profits", c'est-à-dire la somme accumulée des gains et pertes réalisés, en raison des variations de la valeur des actifs qui le composent.

Définition : On appelle *pertes et profits*, noté $P\&P_t$, d'un portefeuille $\Pi_t = (\alpha_t\ ; \beta_t)$ la quantité

$$P\&P_t(\alpha) := \sum_{s=\delta t}^{t} \alpha_s(\delta\tilde{S}_s) \text{ où } \delta\tilde{S}_s = \tilde{S}_s - \tilde{S}_{s-\delta t}.$$

Proposition 5.3 *Pour un portefeuille autofinancé, on a la propriété suivante :*

$$\tilde{V}_t^\pi = V_0^\pi + P\&P_t.$$

Preuve : En effet on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t^\pi &= \frac{V_t^\pi}{B_t} = \sum_{s=\delta t}^{t} \frac{1}{B_s}(V_s^\pi - V_{s-\delta t}^\pi) \\
&= \frac{V_0^\pi}{B_0} + \sum_{s=\delta t}^{t} \frac{1}{B_s}(\alpha_s \cdot S_s + \beta_s B_s - \alpha_{s-\delta t} \cdot S_{s-\delta t} + \beta_{s-\delta t} B_{s-\delta t}) \\
&= V_0^\pi + \sum_{s=\delta t}^{t} (\alpha_{s-\delta t} \cdot \delta\tilde{S}_s) + \sum_{s=\delta t}^{t} (\beta_{s-\delta t} \delta\tilde{B}_s) = V_0^\pi + P\&P_t
\end{aligned}$$

car la dernière somme est nulle (en *euros constants*, le numéraire ne varie pas dans le temps). □

Si l'on suppose que $\tilde{S}_t$ est une martingale, la somme $\sum_{s=\delta t}^{t} \alpha_s(\delta\tilde{S}_s)$ s'appelle la *transformée de la martingale* $\tilde{S}_t$ par la marche aléatoire prévisible α_t. Cette somme est une version discrète de l'*intégrale stochastique* de la marche α_t contre les variations de la martingale $\tilde{S}_t$. Cette somme est elle-même une martingale comme nous allons le voir maintenant.

5.3 Marchés sans arbitrage

Pour simplifier, on suposera dans ce paragraphe et le suivant que le taux d'intéret r est nul. Ce n'est guère réaliste mais une fois les résultats exposés ici bien compris dans ce cas particulier, il est facile de les généraliser au cas général où r n'est pas nul.

Dans la suite, on notera pour simplifier α_t le vecteur de composantes du portefeuille $\Pi_t = (\alpha_t\ ; \beta_t)$. On parlera indifféremment de portefeuille ou de stratégie.

Définition : On dit qu'un portefeuille est un *portefeuille d'arbitrage* (ou une *opportunité d'arbitrage* ou simplement un *arbitrage*) si $P\&L_T^S(\alpha) \geq 0$, et s'il existe un état du monde au moins $\omega_0 \in \Omega$ tel que $P\&L_T^S(\alpha)(\omega_0) > 0$.

En d'autres termes, un arbitrage est un portefeuille tel que même lorsque sa valeur initiale est nulle, sa valeur en T est toujours positive ou nulle et même strictement positive dans au moins un état du monde. C'est donc une stratégie (qu'on appelle aussi parfois *free lunch*) qui est gagnante dans certains cas et ceci sans prendre aucun risque puisqu'elle n'est jamais perdante.

Dans la modélisation des marchés financiers, on admettra généralement qu'une telle stratégie n'existe pas. C'est l'hypothèse dite d'*absence d'opportunité d'arbitrage.* On explique souvent cette hypothèse en disant que si d'aventure une opportunité d'arbitrage apparaisait quelque part le marché se chargerait de la faire disparaître presqu'aussitôt. Il n'est donc pas deraisonnable de supposer qu'à *l'équilibre* il n'en existe pas.

Le théorème suivant est souvent appelé le *premier théorème fondamentale.* Il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un marché soit sans arbitrage. Le fait que cette condition soit suffisante est assez facile à prouver. La preuve de la réciproque (la condition est nécéssaire) est plus élaborée et cette réciproque n'est d'ailleurs plus vraie telle quel lorsqu'on quitte le monde des modèles discrets (Ω fini) pour celui des modèles continus (il en existe toutefois une généralisation dans le cas continu aussi).

Théorème 5.4 *Un marché financier $(S_t^1, \ldots, S_t^d\ ; B_t)$ est sans arbitrage si et seulement s'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$, avec $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, telle que tous les actifs actualisés $(\tilde{S}_t^1, \ldots, \tilde{S}_t^d\ ; \tilde{B}_t)$ soient des martingales sous cette probabilité. Cette probabilité P^* s'appelle* probabilité de martingale *ou* probabilité risque neutre.

Avant de démontrer ce théorème, étudions un exemple que l'on peut trouver dans le livre de Pliska :

Exemple : C'est un exemple à une étape (c'est-à-dire un pas de temps unique $\delta t = T$) et pour lequel on n'a qu'un seul actif risqué S_t défini par $S_0 = 5$ et $S_{\delta t} \in \{3, 4, 6\}$. Comme habituellement on suppose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et on désigne par $p = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 3\}$, $q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 4\}$, and $1 - p - q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 6\}$. Dans ce cas, il est facile de voir que pour que $S = (S_t)_{t\in\{0,T\}}$ soit une martingale il faut que (on rappelle que $r = 0$) :

$$5 = S_0 = \mathbb{E}^*(S_{\delta t} \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^*(S_{\delta t}) = p3 + q4 + (1 - p - q)6 = 6 - 3p - 2q,$$

ou, ce qui revient au même, que $q = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}p$ (et $1 - p - q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p$). Finalement S est une martingale si $3p + 2q = 1$ et $\mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 3\} = p \in (0, \frac{1}{3})$. Les valeurs possibles pour les deux autres probabilités en découlent : $q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 4\} \in (0, \frac{1}{2})$ et $1 - p - q = \mathbb{P}^*\{S_{\delta t} = 6\} \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$. Donc, le théorème 5.4affirme que ce modèle est sans arbitrage si et seulement si $p \in (0, \frac{1}{3}) =: (p^{*-}, p^{*+})$. En d'autres termes, il y a un ensemble des probabilités de martingale pour ce modèle qui forment un segment du type $(\frac{1+\lambda}{2}, \frac{1-3\lambda}{2}, \lambda), \lambda \in [0, \frac{1}{3}]$.

On retiendra qu'en dehors de ces probabilités de martingale (qui donneront chacune un prix d'option différent) aucune probabilité n'est acceptable car toute autre probabilité conduirait à un modèle présentant des opportunités d'arbitrage. Nous reviendons sur la question de la non unicité au prochain paragraphe.

Preuve : Première partie : Pour montrer que l'existence d'une probabilité de martingale entraine l'absence d'opportunité d'arbitrage (qui est la partie facile de la preuve), nous utiliserons le résultat suivant :

Proposition 5.5 *Si $\mathbb{P}^*$ est une probabilité de martingale et α une stratégie autofinancée alors le processus de pertes et profits associé à cette stratégie, $P\&P(\alpha)$, est aussi une $\mathbb{P}^*$-martingale.*

Preuve : On fait la preuve dans le cas d'un seul actif risqué (S_t) pour simplifier. Pour montrer que $P\&P(\alpha)$ est une martingale on utilise la troisième propriété de la proposition 5.1. On a :

$$\delta(P\&P(\alpha))_{t+\delta t} = \sum_{s \in (0..t+\delta t]_{\delta t}} \alpha_s \delta S_s - \sum_{s \in (0..t]_{\delta t}} \alpha_s \delta S_s = \alpha_{t+\delta t} S_{t+\delta t}.$$

Mais α est $\mathcal{F}_t$-previsible, donc $\alpha_{t+\delta t} \in \mathcal{F}_t$, donc

$$\mathbb{E}(\delta P\&P_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\alpha_{t+\delta t}\delta S_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = \alpha_{t+\delta t}\mathbb{E}(\delta S_{t+\delta t}(\alpha) \mid \mathcal{F}_t) = 0,$$

cette dernière espérance étant nulle puisque S est martingale sous P^* par hypothèse. □

Pour prouver l'absence d'opportunité d'arbitrage, considérons un portefeuille α vérifiant $P\&P_0(\alpha) = 0$ et vérifions que $P\&P_T(\alpha)$ est nécessairement d'espérance nulle (et non strictement positive). Comme $\mathbb{P}^*$ est une probabilité de martingale, le processus $P\&P_t(\alpha)$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale. Donc $P\&P_0(\alpha) = \mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha) \mid \mathcal{F}_0)$; mais comme $P\&P_0(\alpha) = 0$, on a

$$\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = \mathbb{E}^*(\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha) \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}^*(P\&P_0(\alpha)) = \mathbb{E}^*(0) = 0.$$

Donc cette stratégie ne peut être un arbitrage, ce qui prouve la première partie du théorème. □

Preuve : deuxième partie : Pour montrer l'existence d'une probabilité de martingale lorsque le marché est sans arbitrage, nous renvoyons le lecteur au livre de Lamberton et Lapeyre. □

5.4 Marchés complets et non complets

On a vu que lorsqu'on modélise les actifs financiers par des m.a. CRR avec la condition d'abscence d'opportunité d'arbitrage $d < R < u$, on peut construire, pour toute option européenne $(T, \varphi(S_T))$, un portefeuille autofinançant qui couvre l'option. On dit aussi de ce portefeuille qu'il *duplique* l'option puisque son prix est, à chaque instant, égal à celui de l'option, ou bien que celle-ci est *duplicable.*

Définition : Si Φ est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable, on dit que Φ est *duplicable* s'il existe un portefeuille autofinançant tel que $V_T^\pi = \Phi$.

Si l'on choisit d'autres modèles que des modèles CRR pour décrire les actifs présents sur le marché, rien n'indique, à priori, que n'importe quelle option souscrite sur un de ces actifs, sera duplicable.

Définition : Un marché où toute option est duplicable s'appelle un *marché complet.* Sinon, on parle de marché *incomplet.*

Une question naturelle se pose : comment calculer le prix d'une option (non nécessairement duplicable) dans un marché incomplet ? La première règle est de se placer dans un marché sans arbitrage (on parle de marché *viable*) et dans ce cas, le théorème précédent affirme l'existence d'au moins une probabilité pour laquelle tous les actifs sont des martingales. On peut alors définir dans ce cas des prix de sur et sous couverture (non uniques) et on pourra vérifier (deuxième théorème fondamental) que seuls les marchés complets auront la propriété d'unicité du prix de couverture que nous avons rencontré dans le cas du modèle CRR.

Définition : Soit $(\mathcal{F}_t)$ la filtration représentant l'information disponible du marché que l'on suppose sans arbitrage. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est appelé un *prix de surcouverture* pour une v.a. Φ $\mathcal{F}_T$-mesurable (telle que le pay off d'une option) s'il existe une stratégie α telle que

$$x + P\&P_T(\alpha) \geq \Phi \; ; \tag{5.3}$$

De même x est un *prix de* sous*couverture* pour Φ s'il existe une stratégie α telle que

$$x + P\&P_T(\alpha) \leq \Phi. \tag{5.4}$$

Proposition 5.6 *Soit un modèle sans arbitrage, soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité pour laquelle tous les actifs sont des martingales et soit Φ un pay off $\mathcal{F}_T$-mesurable. Alors pour tout prix de surcouverture x^+ et tout prix de souscouverture x^- on a :*

$$x^- \leq \mathbb{E}^*(\Phi) \leq x^+.$$

Preuve : Soit une stratégie de surcouverture α telle que $x^+ + P\&P_T^S(\alpha) \geq \Phi$. Comme $\mathbb{P}^*$ est une probabilité de martingale, $\mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = 0$. Donc

$$\mathbb{E}^*(\Phi) \leq \mathbb{E}^*(x^+ + P\&P_T(\alpha)) \leq x^+ + \mathbb{E}^*(P\&P_T(\alpha)) = x^+.$$

On montrerait que $x^- \leq \mathbb{E}^*(\Phi)$ de la même façon en utilisant cette fois une stratégie de sousconverture.
□

Ce résultat montre que tout *prix de non arbitrage* $x^* := \mathbb{E}^*(\Phi)$ obtenu comme espérance du pay off pour une probabilité de martingale est borné supérieurement par n'importe quel prix de surcouverture et aussi borné inférieurement par n'importe quel prix de souscouverture. Posons :

$$\begin{aligned} x_X^+ &:= \text{Min}\,\{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x \text{ est un prix de surcouverture pour } \Phi\} \\ x_X^- &:= \text{Max}\,\{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x \text{ est un prix de souscouverture pour } \Phi\}. \end{aligned}$$

Nous venons de voir que $x^* \in [x_X^-, x_X^+] \neq \emptyset$; cet intervalle est appelé l'intervalle des prix de non arbitrage. Notons que, comme Ω et $[0..T]_{\delta t}$ sont finis, le Max et le Min sont atteint, donc il existe des stratégies α^+ et α^- telles que $x_X^- + P\&P_T(\alpha^-) \leq \Phi \leq x_X^+ + P\&P_T(\alpha^+)$, et il existe ω^- et ω^+ (possiblement égaux) tels que $x_X^\pm + P\&L_T^S(\alpha^\pm)(\omega^\pm) = \Phi(\omega^\pm)$.

Remarque : Dans l'exemple de Pliska, on avait $(p^{*-}, p^{*+}) := (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$. On peut ainsi vérifier que pour un Call à la monnaie $\varphi(S_T) := (S_T - S_0)^+$, on a $x^+ = \mathbb{E}^+(\varphi(S_T))$ et $x^- = \mathbb{E}^-(\varphi(S_T))$, où $\mathbb{E}^+$ est l'espérance par rapport à la probabilité $p = p^{*+}$ et de même pour $\mathbb{E}^-$. On calcule alors facilement $P\&P_T(\alpha^+) - \varphi(S_T) + x^+$ et $P\&L_T^S(\alpha^-) - \varphi(S_T) + x^-$.

Le théorème suivant est parfois appelé le deuxième théorème fondamental.

Théorème 5.7 *Un marché sans arbitrage est complet si et seulement s'il n'existe qu'une seule probabilité de martingale (et donc un seul prix).*

Preuve : voir Lamberton Lapeyre page 19 et 20. □

Remarque : Vendre une option à n'importe quel prix $x > x^+$ permet de faire un arbitrage. En effet il suffit de garder la prime x et d'appliquer une stratégie α^+. A l'instant final T on a $P\&L_T^S(\alpha^+)(\omega) \geq \Phi(\omega) - x^+$, pour l'état du monde ω qui s'est réalisé. On paie alors $\Phi(\omega)$ et on garde x, et on a donc $x + P\&L_T^S(\alpha^+)(\omega) - \Phi(\omega) \geq x - x^+$. Il reste au moins la quantité strictement positive $x - x^+ > 0$ pour un “free-lunch”.

On peut montrer comment obtenir de même un “free-lunch” en achetant une option de pay off Φ à un prix $x < x^-$.

Chapitre 6

Options barrières

Dans cette leçon, on va étudier l'exemple le plus simple d'option *exotique*, c'est-à-dire d'option dont la valeur n'est pas seulement fonction des valeurs atteintes par l'actif sous-jacent à l'échéance mais aussi de toutes les valeurs qu'il prend pendant la durée du contrat. De telles options s'appellent aussi des options *dépendant du chemin.* L'étude des options barrières sera aussi l'occasion de rencontrer la notion de *temps d'arret* et surtout le joli *principe de réflexion* d'André.

6.1 Définitions et exemples

Une option barrière $(T, \varphi(S_T), L)$ est une produit dérivé sur un actif sous-jacent $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ pour lequel le versement de la fonction de paiment $\varphi(S_T)$ à l'échéance T est soumis au fait que l'actif sous-jacent ait franchi ou non, durant la durée de vie du contrat, vers le haut ou vers le bas, une barrière L donnée. Il existe une grande variété d'option barrière ; on peut ranger les plus courantes en deux catégories :

- **les knock-out :** l'option expire automatiquement lorsque le sous-jacent touche la barrière.
- **les knock-in :** l'option n'est activée que si le sous-jacent touche la barrière.

Par ailleurs, ces options s'appellent put, call, options binaires, etc, ..., selon que $\varphi(S) = (K - S)^+$, $\varphi(S) = (S - K)^+$, $\varphi(S) = \mathbb{I}_{S>K}$, etc,.... Voici quelques exemples :

- Un *down and out call* (DOC) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière L est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix K à la date T si celui-ci n'est jamais descendu en dessous de L pendant la durée de vie du contrat.
- Un *down and in put* (DIP) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière L est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix K à la date T seulement si celui-ci est descendu en dessous de L pendant la durée de vie du contrat.
- Un *up and out put* (UOP) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière L est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix K à la date T si celui-ci n'a jamais dépassé le niveau L pendant la durée de vie du contrat.

Il existe de même des options DIC, UIC, UIP, DOP et UOC, mais aussi des options avec doubles barrières et bien d'autres. Souvent le contrat prévoit une *rebate*, somme payée en cash, dans le cas où l'option est out.

Le principal intérêt des options barrières est qu'elles sont moins chères que les options ordinaires correspondantes, environs quatre fois moins chères, car elles laissent à l'acheteur, et d'ailleurs aussi au vendeur, un risque résiduel. Par exemple pour une option DIC, la couverture qu'un call offre par rapport à une envolée du cours du sous-jacent est tout simplement perdue dans le cas où celui-ci n'a pas franchi la barrière. Mais ce risque est jugé suffisamment improbable par celui qui accepte de le prendre ou bien il considère que ses conséquences sont acceptables au regard de l'économie qu'il procure. Pour le vendeur, l'un des intérêt est que, comme les options barrières se négocient uniquement de gré à gré (et non sur les marchés organisés comme c'est le cas pour les put et les call ordinaires), il peut prendre en général des marges plus élévées car le marché des produits OTC (over the counter) est moins tendu.

A titre d'exemple, considérons une entreprise qui va recevoir dans 6 mois en Euros des revenus perçus en Yen et qui craint qu'une dépréciation du Yen par rapport à l'Euro dans les mois à venir vienne mettre en péril le niveau de ces revenus. Elle peut acheter un put à 6 mois qui lui donnera le droit de vendre des Yens en Euros à un prix fixé, par exemple égal ou légèrement inférieur au cours actuel. Mais si l'entreprise achète une option DIP, avec une barrière L peu inférieure au prix d'exercice K, cela lui en coûtera bien moins chère et cela lui assurera la même couverture contre une dépréciation du Yen, sauf dans le cas où à aucun moment donné durant ces 6 mois, le cours ne descend en dessous de L. Mais ce cas correspond à une situation où la dépréciation redoutée est restée très limitée et le risque résiduel peut donc être jugé sans gravité.

Ce sont des situations de ce type qui conduisent au développement du marché des options barrières ; celles-ci constituent plus de 10% de l'activité sur le marché des changes par exemple.

6.2 Mesurabilité et temps d'arrêt

Rappelons que si $(\Omega, P, \mathcal{F})$ est un espace probabilisé, $\mathcal{T}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, on dit qu'une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est *mesurable* par rapport à $\mathcal{T}$, ou qu'elle est $\mathcal{T}$-mesurable, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{X \leq x\} \in \mathcal{T}$. Il est clair que si $\mathcal{T} = \{\phi, \Omega\}$, une v.a. $\mathcal{T}$-mesurable est nécessairement constante et si A étant une partie de Ω, $\mathcal{T} = \{\phi, A, A^c, \Omega\}$, une v.a. $\mathcal{T}$-mesurable aura au plus deux valeurs. Plus généralement, on a la proposition suivante :

Proposition 6.1 *Lorsque* $(\Omega, P, \mathcal{F})$ *est un espace probabilisé fini et* $\mathcal{T}$ *une sous tribu de* $\mathcal{F}$*, une v.a. est* $\mathcal{T}$*-mesurable si et seulement si elle est constante sur les atomes de la tribu* $\mathcal{T}$*.*

Il est aussi utile de connaître la notion de *tribu engendrée par une v.a.* dont nous rappelons la définition :

Définition : Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a. sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$, on appelle *tribu engendrée* par X, notée $\sigma(X)$, la plus petite sous tribu de $\mathcal{F}$ par rapport à laquelle X est mesurable. Plus généralement si X_1, X_2, ..., X_m est une suite de v.a. sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$, la tribu engendrée par cette suite de v.a., notée $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ est la plus petite sous tribu de $\mathcal{F}$ par rapport à laquelle toutes les v.a. X_i, $i = 1, \ldots, m$, sont mesurables.

Exemple : On a vu qu'on peut associer à toute marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ telle que, pour un $t \in \mathbb{T}$ donné, les atomes de $\mathcal{F}_t$ sont formés des états du monde $\omega \in \Omega$ dont les trajectoires $X(\omega)$ coïncident jusqu'à l'instant t. On se convainc facilement que les v.a. X_t sont $\mathcal{F}_t$-mesurables et aussi $\mathcal{F}_s$-mesurable pour tout $s \geq t$ mais X_t n'est généralement pas $\mathcal{F}_s$-mesurable pour $s < t$. Intuitivement la propriété d'être $\mathcal{F}_t$-mesurable pour une v.a. sur Ω signifie simplement, $\mathcal{F}_t$ représentant l'information dont on dispose à l'instant t, que cette v.a. ne dépend que de l'information dont on dispose à cet instant ou plus simplement qu'elle est *connue à* l'instant t, mais qu'elle ne peut pas prévoir l'avenir, c'est-à-dire distinguer (en leur donnant des valeurs différentes) deux trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant t mais ne coïncideraient plus au dela.

En particulier il est facile de voir que si $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est la filtration associée à une m.a. $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de Cox-Ross-Rubinstein, S_T est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable de même que toute v.a. de la forme $\varphi(S_T)$ où φ est une fonction (déterministe) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Il y a un point un peu subtile qu'il est important de noter ici : pour une marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, les deux tribus $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(X_t)$ ne sont pas égales. La première représente l'information dont on dispose jusqu'à l'instant t et la seconde l'information dont on dispose à l'instant t. En réalité on a $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_{\delta t}, \ldots, X_{t-\delta t}, X_t)$ et donc $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$ mais cette inclusion est stricte. Une v.a. qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable, donne donc nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels X_t coïncide *jusqu'à l'instant* t et donc, en particulier la même valeur pour deux états du monde pour lesquels X_t coïncide à *l'instant* t, alors qu'une v.a. $\sigma(X_t)$-mesurable donne la même valeur à deux états du monde pour lesquels X_t coïncide à l'instant t, mais pas nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels X_t coïncide à l'instant t mais pas à un instant antérieur.

La notion de *temps d'arrêt* formalise l'idée d'un instant où quelque chose se produit, par exemple le passage d'une barrière, sans que cela ait lieu nécessairement au même instant sur toutes les trajectoires : en ce sens c'est une temps *aléatoire* puisque sa valeur dépend de l'état du monde.

Définition : Si $(\Omega, P, \mathcal{F})$ est un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une filtration, une v.a. $\tau : \Omega \to \mathbb{T}$ est un *temps d'arrêt* si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

On peut vérifier que la condition "pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$" est équivalente à la précédente. L'exemple suivant est l'un des exemples de temps d'arrêt les plus utilisés :

Exemple : Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une m.a. sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sa filtration associée et $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous ensemble quelconque. La v.a. suivante qui représente *le premier instant d'entrée d'une trajectoire dans le sous ensemble* A est un temps d'arrêt :

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \text{Min}\,\{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \phi \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Par contre on voit facilement que la v.a. suivante n'est pas un temps d'arrêt :

$$\theta(\omega) := \begin{cases} \text{Max}\,\{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \phi \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

La caractérisation suivante des temps d'arrêt est souvent très utile :

Proposition 6.2 *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une m.a. sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$, et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ la filtration associée, une v.a. τ est un temps d'arrêt si et seulement si*

$$[\tau(\omega) = t \quad et \quad \omega' \overset{t}{\sim} \omega] \quad \Rightarrow \quad \tau(\omega') = t$$

En utilisant cette caractérisation, on montre par exemple que si τ et τ' sont deux temps d'arrêt alors $\tau \wedge \tau' := \text{Min}\,(\tau, \tau')$ est encore un temps d'arrêt, de même que $\tau + c$, où c est une constante.

6.3 Calcul du prix d'une option DIC

Pour calculer le prix d'une DIC, nous allons supposer comme précédemment que l'actif sous-jacent suit un modèle CRR mais nous choisissons cette fois un taux d'escompte $r = 0$ pour simplifier.

Définition : Soit $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$une m.a. CRR sur $(\Omega, P, \mathcal{F})$ et soit $L > 0$. La v.a. suivante est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$ associée :

$$\tau_L(\omega) := \begin{cases} \text{Min}\,\{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq L\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq L\} \neq \phi \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $S_t(\omega)$ est la trajectoire correspondant à l'état du monde ω, $\tau_L(\omega)$ désigne donc le premier instant qui suit le franchissement de la barrière L si cet instant précède T et il vaut T si la trajectoire ne franchit pas la barrière avant T. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un temps d'arrêt en utilisant la caractérisation donnée par la proposition 6.2.

Ce temps d'arrêt permet d'exprimer par une formule la valeur à l'échéance ou paye off d'une option DIC :

Définition : Une down and in call (DIC) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière L souscrite sur un actif modélisé par une m.a. CRR (S_t) a pour valeur à l'échéance :

$$\psi_T = (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L < T}$$

où $\mathbb{I}_{\tau_L<T}$ est la v.a. sur Ω qui vaut 1 si $\tau_L < T$ et 0 sinon.

On a vu lors des leçons précédentes comment calculer le prix d'une option $(T, \varphi(S_T))$ sur un sous-jacent $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de type CRR : c'est la formule fondamentale (proposition 4.3). Dans ce cas le paye off $\varphi(S_T)$ est une v.a. S_T-mesurable c'est-à-dire qur $\varphi(S_T)$ est connu dès qu'on connaît la valeur atteinte par (S_t) en $t = T$. Dans le cas d'une option barrière, la valeur atteinte par (S_t) en $t = T$ ne suffit pas pour calculer le paye off, il faut en plus connaître la trajectoire suivie par S_t entre $t = 0$ et $t = T$ puisqu'il faut savoir si celle-ci a franchi la barrière ou non. Cela sigifie que la valeur de l'option à l'échéance n'est plus $\sigma(S_T)$-mesurable mais bien $\mathcal{F}_T$-mesurable. D'où la nécessité de généraliser la formule fondamentale :

Proposition 6.3 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, en supposant le taux d'escompte nul, le prix à l'instant $t = 0$ d'une option (T, ψ_T), où ψ_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable, est donnée par $\psi_0 = \mathbb{E}(\psi_T) = \mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L<T})$, c'est-à-dire qu'il est égal à l'espérance, sous la probabilité risque neutre, de sa fonction de paiement.*

La preuve de cette proposition consiste simplement à reprendre celle de la proposition 4.3 et vérifier que seule la $\mathcal{F}_T$-mesurabilité du paye off et non la $\sigma(S_T)$-mesurabilité a été utilisée.

Il reste cependant à calculer l'espérance $\mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L<T})$. C'est pour faire cela qu'on utilise le *principe de symétrie d'André*.

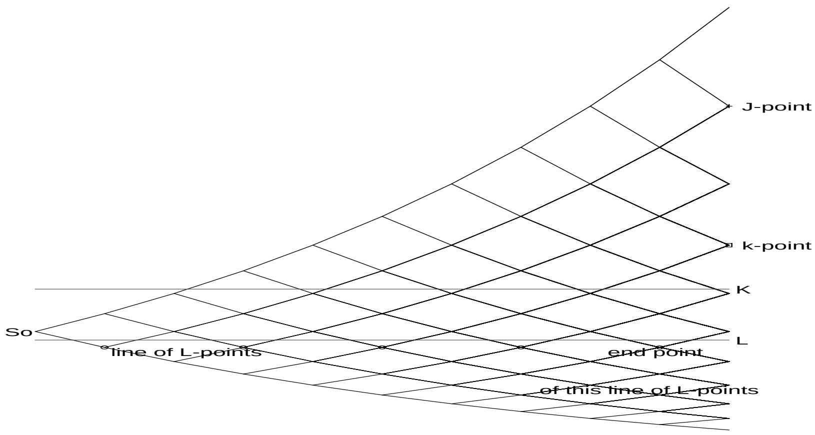


FIG. 6.1 – La ligne des L-points est la ligne de noeuds de l'arbre située sur ou immédiatement en-dessous de la barrière d'ordonnée L. Elle a pour ordonnée S_0u^{J-n} où le nombre J défini par 6.1 a un sens intéressant : c'est le nombre maximal de *up* que peut présenter à l'instant final une trajectoire qui a franchi la barrière. Parmi ces trajectoires, celle qui aboutit (pour $i = n$) au point le plus élevé, noté J-point sur la figure, commence par $n - J$ *down*, pour atteindre la ligne de L-points, puis ne présente plus que des *up*.

6.4 Evaluation par le principe d'André

Pour évaluer cette espérance et donc l'exprimer comme une somme finie, on va utiliser le principe de symétrie d'André qui permet de calculer le nombre de trajectoires d'une marche binomiale qui atteignent un niveau terminal donné en ayant franchi une barrière fixée. Ce principe classique est lié au problème combinatoire appelé *The Ballot problem* et son utilisation pour l'évaluation d'options barrières, maintenant classique, est joliment exposée par exemple dans [12].

Il est utile de faire l'hypothèse supplémentaire suivante sur le modèle du sous-jacent : supposer que $d = 1/u$. Les valeurs prises par S_t lorsque $t = n\delta t$ s'écrivent alors $S_t = S_0u^{2j-n}$ et, en fait, cette hypothèse entraine que les noeuds de l'arbre sont alignés horizontalement. Le niveau de la barrière L se trouve alors située entre deux lignes (horizontales) de noeuds de l'arbre. On attache son attention à la ligne de noeuds située immédiatement en dessous de L puisque toute trajectoire qui franchit la barrière passe nécessairement par l'un des noeuds de cette ligne de noeuds. Elle a pour ordonnée S_0u^{J-n}, où J est le plus grand entier $m \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $S_0u^{m-n} \leq L$, qui vaut (voir figure 6.1)

$$J := \left[n + \frac{\ln \frac{L}{S_0}}{\ln u} \right] = n + \left[\frac{\ln \frac{L}{S_0}}{\ln u} \right] \tag{6.1}$$

où $[z]$ désigne la partie entière de z, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur au nombre z. En fait, il y a deux cas de figure : soit le point le plus à droite de cette ligne de noeuds, notée *end point* sur la figure, est un point d'abscisse $T = n\delta t$ et son ordonnée s'écrit $S_0u^ld^{n-l} = S_0u^{J-n}$, pour un $J = 2l$ pair, soit son extrémité est un point d'abscisse $T - \delta t = (n-1)\delta t$ et son ordonnée s'écrit $S_0u^ld^{(n-1)-l} = S_0u^{J-n}$ pour un $J = 2l + 1$ impair. A noter que dans les deux cas, l'entier l (qui vaut $J/2$ ou $(J-1)/2$ selon la parité de J) est défini par

$$l := \left[\frac{n}{2} + \frac{\ln \frac{L}{S_0}}{2\ln u} \right]. \tag{6.2}$$

Le principe de symétrie d'André, illustré par la figure 6.2 (dans le cas où la ligne de noeuds située immédiatement sous la barrière a pour extrémité un point d'abscisse $T = n\delta t$ (cas où J est pair)) consiste en la remarque suivante : le nombre de trajectoires issues de O qui atteignent le niveau j en $t = T$, en ayant franchi la barrière, est égal au nombre de trajectoires issues du point O', symétrique de O par

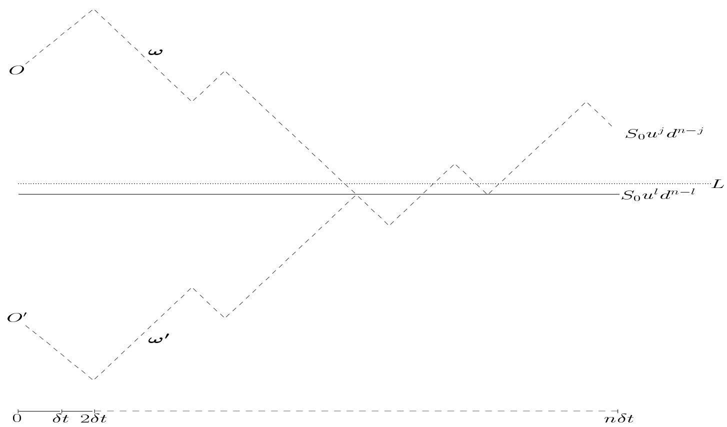


FIG. 6.2 – Illustration du principe de symétrie d'André dans le cas où $J = 2l$ est pair.

rapport à la ligne de noeuds située immédiatement sous la barrière, et qui atteignent ce même niveau. Comme j représente le nombre de *up* d'une trajectoire issue de O (et $n-j$ le nombre de *down*), on vérifie sans mal que si une trajectoire notée ω a j *up*, sa symétrique notée ω' en aura j' avec $j' = j+n-J$. Donc, si $J/2 \leq j \leq J$, le nombre de trajectoires cherché est $\binom{n}{j+n-J}$, ce qui s'écrit encore $\binom{n}{J-j}$. Par ailleurs on voit immédiatement que si le niveau terminal j est tel que $0 \leq j \leq J/2$, toute trajectoire issue de O doit franchir la barrière pour atteindre ce niveau (donc le nombre de trajectoires cherché est simplement $\binom{n}{j}$), et enfin si $j > J$ aucune trajectoire issue de O' ne peut atteindre ce niveau.

D'où le lemme 6.4 suivant dans le cas où J est pair. Dans le cas où $J = 2l+1$ est impair (cas non représenté sur la figure), on retrouve les mêmes formules. En effet le nombre de trajectoires issues de O qui atteignent le niveau j à l'instant final $t = n\delta t$, en ayant franchi la barrière, est égal à la somme du nombre de trajectoires ayant atteint le niveau $j-1$ à l'instant précédent $t = (n-1)\delta t$ (en ayant franchi la barrière) et de trajactoires ayant atteint le niveau j à l'instant précédent $t = (n-1)\delta t$ (en ayant franchi la barrière). Donc ce nombre est la somme $\binom{n-1}{j+n-1-J} + \binom{n-1}{j+n-J}$, soit encore $\binom{n}{J-j}$:

Lemme 6.4 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $J \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq J \leq n$. Le nombre de trajectoires de la marche aléatoire binaire $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ telles que $S_{n\delta t} = S_0u^{2j-n}$ (c'est-à-dire qui atteignent l'ordonnée S_0u^{2j-n} à l'instant $t = n\delta t$) en ayant franchi la ligne de noeuds d'ordonnée S_0u^{J-n} à un instant quelconque entre $t = 0$ et $t = n\delta t$ est égal à :*

$$A(j,J) = \begin{cases} 0 & \text{si } J < j \leq n \\ \begin{pmatrix} n \\ J-j \end{pmatrix} & \text{si } J/2 \leq j \leq J \\ \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} & \text{si } 0 \leq j \leq J/2 \end{cases}$$

La preuve de ce lemme combinatoire est laissée en exercice. On en déduit le théorème suivant qui donne le prix d'une option DIC à l'instant initial comme une somme finie. On verra que cette somme n'a pas la même forme selon que $L \leq K$ ou que $K \leq L$. Par ailleurs, comme le prix de l'option dépend du niveau de son prix d'exercice K, il convient aussi de repérer K, tout comme L, par rapport aux noeuds de l'arbre. Pour cela on introduit l'entier k qui correspond à la ligne de noeuds de l'arbre, ayant une extrémité d'abscisse $n\delta t$, située immédiatement au dessus du prix d'exercice K :

$$k = \left[\frac{n}{2} + \frac{\ln\frac{K}{S_0}}{2\ln u}\right] + 1. \tag{6.3}$$

Théorème 6.5 *Une down and in call (DIC) de prix d'exercice K, d'échéance T et de barrière L souscrite sur un actif modélisé par une m.a. (S_t) a pour valeur initiale :*
dans le cas où $L \leq K$:

$$DIC_0 = e^{-rT} \sum_{j=k}^{J} \binom{n}{J-j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K) \tag{6.4}$$

dans le cas où $K \leq L$:

$$DIC_0 = e^{-rT} \left\{ \sum_{j=k}^{l} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K) + \sum_{j=l+1}^{J} \binom{n}{J-j} p^j (1-p)^{n-j} (S_0 u^{2j-n} - K) \right\} \tag{6.5}$$

Preuve : Notons $S(j)$ le nombre $S(j) := S_0 u^{2j-n}$. On a par définition :

$$\begin{aligned} DIC_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L \leq T}) \\ &= e^{-rT} \left(\sum_{j=0}^{j=n} P\{S_T = S(j), \tau_L \leq T\}(S(j) - K)^+ + \sum_{j=0}^{j=n} P\{S_T = S(j), \tau_L > T\}(0) \right) \end{aligned}$$

et donc, en introduisant l'entier k défini en (6.3) :

$$DIC_0 = e^{-rT} \sum_{j=k}^{j=n} P\{S_T = S(j), \tau_L \leq T\}(S(j) - K).$$

Mais toutes les trajectoires aboutissant au niveau j ont la même probabilité $p^j(1-p)^{n-j}$, et le nombre d'entre elles qui atteignent les noeuds en question est égal à $A(j, J)$, comme cela a été établi au lemme 6.4. Donc

$$\begin{aligned} P(S_T = s_j, \tau_L \leq T) &= p^j (1-p)^{n-j} A(j, J) && (6.6) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } J < j \leq n \\ \binom{n}{J-j} p^j (1-p)^{n-j} & \text{if } J/2 \leq j \leq J \\ \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} & \text{if } 0 \leq j \leq J/2 \end{cases} && (6.7) \end{aligned}$$

d'où les formules (6.4) et (6.5) selon que $L \leq K$ ou que $K \leq L$. □

Remarque : Notons qu'on peut bien entendu établir, toujours à l'aide du même lemme, des formules analogues à celles du théorème 6.5 pour chacune des autres options barrière (voir l'article par F. Diener et E. Bagge intitulé *Calcul des asymptotiques des options barrières à*
`http ://math1.unice.fr/Bibliotheque/MesPublis.html`).

Chapitre 7

Options américaines

Alors qu'une option européenne ne donne à son détenteur le droit d'exercer (et d'obtenir le pay-off) qu'à un instant fixé T, l'option américaine correspondante lui donne ce droit à tout instant $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, T = n\delta t\}$ compris entre 0 et T. Par exemple un call européen sur l'actif S_t rapportera $(S_T - K)^+$ à la date T et le call américain sur le même actif sous-jacent rapportera, s'il est exercé à la date t, le pay-off $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$. Nous allons dans cette leçon apprendre à calculer le prix d'une option américaine et au passage nous decouvrirons quelques beaux outils du calcul stochastique comme le théorème d'arrêt optimal ou la décomposition de Doob-Meyer des surmartingales.

7.1 Calcul du prix par récurrence rétrograde

Comme précédemment, le processus (S_t), défini pour tout $t \in [0..T]_{\delta t} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, T = N\delta t\}$, représente l'évolution d'un actif financier au cours du temps, et on le suppose adapté par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ qui représente l'information disponible à l'instant t. Désignons par U_t la valeur à l'instant t d'une option américaine dont le pay-off est noté $\varphi(S_t)$ (s'il exerce son option à l'instant t, le détenteur de l'option reçoit $\varphi(S_t)$). Comment évaluer son prix ?

On le détermine de proche en proche à partir de la valeur finale la valeur minimale d'un portefeuille de couverture. Tout d'abord, si l'option n'a pas été exercée avant la date finale T, elle vaudra en $t = T$ le pay-off $\varphi(S_T)$. A l'instant précédent $t = T - \delta t$, le vendeur devra pour se couvrir disposer d'une richesse au moins égale au pay-off $\varphi(S_{T-\delta t})$, pour le cas où le détenteur de l'option l'exercerait à cette date, et en même temps au moins égale à $e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t})$ qui est le prix d'un portefeuille de couverture lui permettant de faire face à ses obligations à la date T si le détenteur ne vient pas exercer avant T. On peut donc écrire pour le prix de l'option américaine en $T - \delta t$:

$$U_{T-\delta t} = \mathrm{Max}\,\{\varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_{T-\delta t})\} = \mathrm{Max}\,\{\varphi(S_{T-\delta t}), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_T/\mathcal{F}_{T-\delta t})\}$$

Mais on peut reproduire ce raisonnement pour l'instant $t = T - 2\delta t$, et ainsi de suite. On obtient ainsi la relation de récurrence retrograde suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U_t & = & \mathrm{Max}\,\left(\varphi(S_t), e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)\right) \\ U_T & = & P_T \end{array} \right. \tag{7.1}$$

Dans le cas d'une option européenne, par exemple un Call, on déduit facilement de la relation de récurrence $C_t = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(C_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$ la formule fondamentale $C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(C_T/\mathcal{F}_t)$ indiquant que la valeur de l'option à l'instant t est l'espérance actualisée de son pay-off. Dans le cas d'une option américaine, on ne déduit pas facilement de cette relation (7.1) la valeur de U_t directement comme une fonction de t et du pay-off final $\varphi(S_T)$ mais nous verrons qu'il existe néanmoins une formule fermée de ce type, quoique moins explicite. Par contre, il est facile de programmer cette récurrence pour calculer la prime U_t à tout instant t.

On ne sera pas surpris que l'option américaine soit plus chère, ou au moins aussi chère, que l'option européenne correpondante puisqu'elle donne plus de droits. La différence entre les deux s'appelle la *prime d'exercice anticipé* (*early exercice premium*). Dans quels cas a-t-on intérêt à exercer de façon anticipée c'est-à-dire dans quels cas cette prime est-elle strictement positive ? Nous allons voir que ce n'est jamais le cas pour un Call, sauf si l'actif sous-jacent distribue des dividendes et que par contre c'est généralement le cas pour un Put, à moins de pouvoir supposer nul le taux d'intérêt r (ce qui ne serait pas très réaliste).

Proposition 7.1 *En supposant que l'actif sous-jacent S_t ne distribue pas de dividende, le prix d'un Call américain sur S_t est égal au prix du Call européen de même date et même prix d'exercice. Autrement dit, la prime d'exercice anticipée est nulle.*

Preuve : On déduit de (7.1) que pour tout t, $U_{t+\delta t} \geq \varphi(S_{t+\delta t})$. L'espérance conditionnelle et l'actualisation conservant cette inégalité, il en résulte que

$$e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) \geq e^{-r\delta t}\mathbb{E}(\varphi(S_{t+\delta t})/\mathcal{F}_t).$$

Comme $\varphi(S_t) = (S_t - K)^+$ est une fonction convexe de S_t, l'inégalité de Jensen[1] implique que

$$e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) \geq \left(e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) - e^{-r\delta t}K\right)^+ .$$

Mais comme la valeur actualisée de S_t est une martingale, $e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) = S_t$, et donc

$$e^{-r\delta t}\mathbb{E}(U_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) \geq \left(S_t - e^{-r\delta t}K\right)^+ \geq (S_t - K)^+ = \varphi(S_t),$$

la dernière inégalité résultant simplement du fait que $-e^{-r\delta t} \geq -1$. Des deux termes du maximum de (7.1), le second reste, pourtout t, supérieur ou égal au premier. Il n'y a donc pas d'intérêt à exercer l'option avant la date finale T. □

On notera que si l'on remplace dans ce calcul le pay-off du Call $(S_t - K)^+$ par celui du Put $(K - S_t)^+$, la dernière inégalité cesse d'être satisfaite dès que $r > 0$. Et, de fait, si l'exercice anticipé n'est jamais intéressant dans le cas du Call, il l'est souvent dans celui du Put (sauf si $r = 0$), comme nous allons le voir maintenant.

7.2 Théorème d'arrêt optimal

Rien dans la formule de récurrence (7.1) ne permet aisément au détenteur de l'option américaine de savoir à quel moment un exercice anticipé pourrait être intéressant pour lui.En réalité, il existe une courbe dans l'espace (t, S_t) appelée la *frontière d'exercice* (voir la figure 7.1) qui a la propriété suivante : aussi longtemps que le cours de l'actif sous-jacent S_t ne franchit pas cette courbe, un exercice anticipé n'est pas intéressant (il est préférable de garder l'option) mais dès que le cours la franchit, il est intéressant d'exercer et il est même préférable de le faire sans attendre. On ne sait pas calculer l'équation explicite de cette courbe mais on peut en calculer des approximations plus ou moins facilement. D'un point de vue théorique, on peut montrer que cette frontière d'exercice est le lieu d'un temps d'arret appelé *temps d'arret optimal*. On a le théorème suivant :

Théorème 7.2 *Si $\mathcal{T}(t,T)$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans $[t..T]_{\delta t}$, le prix à l'instant t de l'option américaine de pay-off $\varphi(S_t)$ est donnée par*

$$U_t = Max_{\tau \in \mathcal{T}(t,T)} e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(\varphi(S_\tau)/\mathcal{F}_t)$$

le maximum étant atteint pour le temps d'arrêt τ_t défini par

$$\tau_t := Min\{s \in [t..T]_{\delta t} \ \ , \ \ U_s = \varphi(S_s)\}.$$

Notons qu'en particulier, si on applique ce théorème au cas où $t = 0$, la prime d'une option américaine U_0 est égale à $U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})$, où τ_0 est le premier instant où le prix de l'option est égal au pay-off, c'est-à-dire le premier instant où le maximum de la formule (7.1) est égal au premier des deux termes. Plus précisément, tant que ce maximum est égal au second terme (espérance des valeurs futures), il n'est pas intéressant d'exercer, mais au premier instant où le pay-off dépasse la valeur de la couverture, il convient d'exercer.

Preuve : Pour simplifier, voici la preuve dans le cas particulier où $t = 0$ le cas général étant très semblable.

On introduit la valeur actualisée de l'option américaine $\tilde{U}_t$ définie par $\tilde{U}_t = e^{-rt}U_t$ et on considère $\tilde{U}_{t\wedge\tau_0}(\omega)$ qui est égale à $\tilde{U}_t(\omega)$ aussi lontemps que $t < \tau_0(\omega)$ et à une constante $\tilde{U}_{\tau_0(\omega)}(\omega)$ pour tout

[1]pour φ convexe, $\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$, puisque l'hypergraphe de φ est convexe - observer comment sont localisés $\mathbb{E}(X, \varphi(X))$ et $(\mathbb{E}(X), \varphi(\mathbb{E}(X))$; dans notre contexte finitaire, $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)(\omega) = \mathbb{E}(Y|\overline{\omega}_t)$, où $\overline{\omega}_t$ désigne l'atome de ω dans l'algèbre $\mathcal{F}_t$.

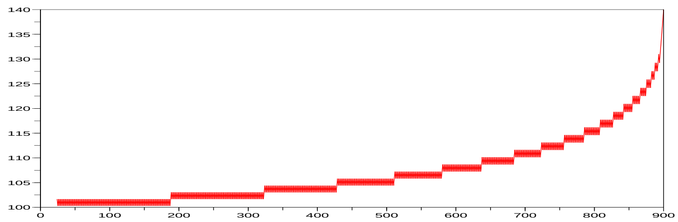


FIG. 7.1 – Tracé de la frontière d'exercice du put américain à la monnaie dans un modèle de Cox, Ross et Rubinstein avec $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$, $T = 1$, et $n = 900$.

$t \geq \tau_0(\omega)$. Cette marche est appelée la marche $\tilde{U}$ arrêtée au temps τ_0. Nous allons vérifier que cette marche est une $\mathcal{F}_t$-martingale : par définition de τ_0, comme $1 = \mathbb{I}_{t<\tau_0} + \mathbb{I}_{t\geq\tau_0}$ et ces deux indicatrices étant $\mathcal{F}_t$-mesurable, puisque τ_0 est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0}/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{I}_{t<\tau_0}\mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0}/\mathcal{F}_t) + \mathbb{I}_{t\geq\tau_0}\mathbb{E}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0}/\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t<\tau_0}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0})/\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t\geq\tau_0}(\tilde{U}_{(t-\delta t)\wedge\tau_0} - \tilde{U}_{t\wedge\tau_0})/\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t<\tau_0}(\tilde{U}_{t-\delta t} - \tilde{U}_t)/\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{t\geq\tau_0}(\tilde{U}_{\tau_0} - \tilde{U}_{\tau_0})/\mathcal{F}_t).
\end{aligned}$$

Or sur $\{t < \tau_0\}$, $\tilde{U}_{t-\delta t} = \mathbb{E}(\tilde{U}_t/\mathcal{F}_{t-\delta t})$ d'après (7.1) et donc le premier terme est nul. C'est évidemment le cas aussi du second donc $\tilde{U}_{t\wedge\tau_0}$ est bien une martingale.

Il en résulte que $\tilde{U}_{0\wedge\tau_0} = \mathbb{E}(\tilde{U}_{T\wedge\tau_0})$ et donc que l'on a bien $U_0 = \mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0}))$.

Il reste a vérifier que pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}(t,T)$, $\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$. On a bien en effet

$$\mathbb{E}(\varphi(S_{\tau_0})) = U_0 \geq \mathbb{E}(U_{t\wedge\tau}) = \mathbb{E}(U_\tau) \geq \mathbb{E}(\varphi(S_\tau))$$

la première inégalité résultant du fait qu'une surmartingale arrêtée (ici il s'agit de $\tilde{U}_{t\wedge\tau}$) est encore une surmartingale (exercice) et la seconde du fait que pour tout t on a $U_t \geq \varphi(S_t)$ d'après (7.1). $\square$

Remarque : Si l'on désigne comme nous l'avons fait pour U_t, par $\widetilde{\varphi(S_t)}$ le pay-off actualisé, la formule (7.1) peut s'écrire plus simplement

$$\tilde{U}_t = \max\{\widetilde{\varphi(S_t)}, \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)\}.$$

On peut alors vérifier que $\tilde{U}_t$ est une surmartingale, et plus précisément que cette formule la définit comme *la plus petite surmartingale qui majore le pay-off actualisé* $\widetilde{\varphi(S_t)}$. C'est ce que l'on appelle l'*enveloppe de Snell* de ce pay-off actualisé $\widetilde{\varphi(S_t)}$.

Le théorème précédent est en fait un théorème général qui permet d'exprimer toute enveloppe de Snell comme une martingale obtenue en arrêtant de façon appropriée la surmartingale constituée par cette enveloppe de Snell.

7.3 Stratégie de couverture avec consommation

Nous avons justifié la définition par récurrence retrograde du prix de l'option américaine en indiquant qu'avec cette valeur le vendeur de l'option pouvait se couvrir dans tous les cas, que le détenteur exerce de façon anticipé ou non. Mais comme nous allons le voir maintenant il ne s'agit plus ici, comme dans le cas européen, d'une couverture exacte car autofinancée mais plutot d'une *surcouverture* encore appelée *couverture avec consommation*. En effet, tant que la frontière d'exercice n'a pas été franchie, la prime U_0, investie dans un portefeuille de couverture, gérée de façon dynamique comme pour la couverture d'une option européenne, fournit une couverture exacte en ce sens que la valeur du portefeuille à chaque instant est exactement égale à la valeur de l'option américaine. Une fois la frontière d'exercice franchie (si cela a lieu), il y a deux possibilités. Soit le détenteur de l'option l'exerce, il recupère le pay-off et l'option cesse d'exister. Soit il n'exerce pas (il n'a pas noté le franchissement de la frontière d'exercice, ou il a mieux à faire) et dans ce cas le vendeur peut constituer son portefeuille de couverture à un prix strictement inférieur au pay-off et réalise un gain aux dépens du détenteur négligeant. Ce "revenu" durera aussi longtemps que le prix de l'action restera inférieur à la "frontière d'exercice" et que le détenteur de l'option n'exerce pas son droit, rapportant une richesse strictement positive que l'on désigne sous le nom de consommation et qui restera acquise au vendeur de l'option.

La couverture d'une option américaine est donc une *surconverture* qui peut soit être une simple couverture (exacte) soit générer une consommation, selon les cas.

Il y a une façon simple et élégante de formaliser cette situation au moyen d'un résultat connu sous le nom de *Décomposition de Doob-Meyer.*

Théorème 7.3 *Soit $\tilde{U}_t$ une $\mathcal{F}_t$-surmartingale. Il existe une marche aléatoire A_t croissante et prévisible (c'est-à-dire telle que pour tout t A_t soit $\mathcal{F}_{t-\delta t}$-mesurable) telle que*

$$\tilde{U}_t = M_t - A_t$$

où M_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale. Cette décomposition de $\tilde{U}_t$ s'appelle sa décomposition de Doob-Meyer.

Preuve : La démonstration de ce théorème est particulièrement simple dans le cas discret où nous nous plaçons ici. On définit les deux marches A_t et M_t de la façon suivante :

$$A_0 := 0 \quad A_{t+\delta t} := A_t + \mathbb{E}(\tilde{U}_t - \tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$$

et

$$M_0 := 0 \quad M_{t+\delta t} := M_t + \tilde{U}_{t+\delta t} - \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)$$

Puis on vérifie qu'elles satisfont les propriétés annoncées. Tout d'abord A_t est croissante car $\tilde{U}_t$ est une surmartingale, et est prévisible par construction. D'autre part on a :

$$\mathbb{E}(M_{t+\delta t} - M_t/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)/\mathcal{F}_t) = 0$$

en appliquant simplement la linéarité et la transitivité de l'espérance conditionnelle. D'où le fait que M_t soit une $\mathcal{F}_t$-martingale. □

Dans le théorème suivant, on note, pour simplifier, Z_t le pay-off actualisé de l'option américaine.

Théorème 7.4 *Soit Z_t un processus adapté à $\mathcal{F}_t$ et soit $\tilde{U}_t$ son enveloppe de Snell. Soit $\tilde{U}_t = M_t - A_t$ la décomposition de Doob-Meyer de $\tilde{U}_t$. Alors le temps d'arrêt optimal τ_0 défini par $\tau_0 = Min\{s \in [0..T]_{\delta t} \ , \ U_s = Z_s\}$ est égal au temps d'arrêt $\tau_A = Min\{s \in [0..T]_{\delta t} \ , \ A_{s+\delta t} \neq 0\}$ si $A_T \neq 0$ et $\tau_0 = T$ sinon.*

Ce théorème affirme donc que le temps d'arrêt optimal, c'est à dire l'instant d'exercice optimal pour le détenteur, est le premier instant où le processus croissant A_t cesse d'être nul. Ce processus apparaît donc comme représentant précisément la consommation. En effet, dès que la frontière d'exercice est franchie, si le détenteur n'exerce pas l'option, la valeur de l'option cesse d'être la valeur d'un portefeuille autofinancé et commence à générer une consommation égale au processus croissant A_t. C'est cette consommation qui fait de l'option américaine une surmartingale (et non une martingale comme l'option européenne) et du portefeuille de couverture une sur couverture (et non une couverture exacte comme pour l'option européenne).

Preuve : La preuve montre successivement que $\tau_A \geq \tau_0$ et que $\tau_A \leq \tau_0$.

– Soit $t \in [0..T]_{\delta t}$. Sur $\{\tau_A = t\}$, $A_t = 0$ et $A_{t+\delta t} \neq 0$. Donc $\tilde{U}_t = M_t - A_t = M_t$ et $\tilde{U}_{t+\delta t} = M_{t+\delta t} - A_{t+\delta t} < M_{t+\delta t}$. Donc

$$\mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) < \mathbb{E}(M_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t) = M_t = \tilde{U}_t.$$

Comme $\tilde{U}_t = \text{Max}\{Z_t, \mathbb{E}(\tilde{U}_{t+\delta t}/\mathcal{F}_t)\}$, ceci entraine que $\tilde{U}_t = Z_t$. Donc, par définition de τ_0, $\tau_A \geq \tau_0$.

– Soit $s \in [0..T]_{\delta t}$. Sur $\{\tau_0 = s + \delta t\}$, $\tilde{U}_{s+\delta t} = Z_{s+\delta t}$ et $\tilde{U}_s > Z_s$. Donc, comme A_t est prévisible,

$$\tilde{U}_s = \mathbb{E}(\tilde{U}_{s+\delta t}/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_{s+\delta t} - A_{s+\delta t}/\mathcal{F}_s) = M_s - A_{s+\delta t} = \tilde{U}_s + A_s - A_{s+\delta t}$$

Donc $A_{s+\delta t} = A_s$, d'où $\tau_A \leq \tau_0$.

□

Chapitre 8

Black-Scholes comme limite de CRR

Si l'on se pose la question de savoir si l'on a déjà vu une formule de mathématique publiée dans un journal grand public, on réalise que la réponse est très probablement "non" (on pense éventuellement à $E = mc^2$ mais c'est une formule de physique). Pourtant en 1997, lorsque Black, Scholes et Merton reçurent le prix Nobel d'économie, la formule, connue aujourd'hui sous le nom de *formule de Black-Scholes*, fit la une du New York Times, signe de l'importance qu'elle avait (et a encore) pour le monde de la finance.

8.1 La formule de Black-Scholes

Voici cette formule dans le cas d'un Call (Européen) :

$$C_0 = S_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - Ke^{-rT} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \tag{8.1}$$

où $d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Elle donne le prix à l'instant initial (la prime) d'un Call Européen de date d'exercice T et de prix d'exercice K sur un actif sous jacent de prix initial S_0, de volatilité σ, sachant que le taux sans risque est r. On notera que d_1 et d_2 sont des constantes qui vérifient $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Cette formule permet de calculer la prime du Call dès lors qu'on se donne les constantes T, K, S_0, σ et r dont elle dépend.

On la réécrit souvent en utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\mathcal{N}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Elle s'écrit alors plus simplement $C_0 = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$.

La formule correspondante pour une option Put (Européen) de mêmes paramètres est

$$P_0 = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1). \tag{8.2}$$

A partir de ces deux expressions de prix de Call et de Put, on peut vérifier là encore la relation de parité Call-Put en utilisant les propriétés de symétrie de la loi normale, plus précisément en utilisant que l'on a $\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 1$ pour tout x.

8.2 Limite du prix CRR

On a vu que dans un modèle Cox, Ross et Rubinstein, la prime d'un Put (Européen), tout comme celle d'un Call, est égale à l'espérance, sous la probabilité risque neutre, du payoff actualisé :

$$P_0(n) = e^{-rT}\mathbb{E}\varphi(S_T)$$

où φ désigne ce payoff qui, dans le cas du Put, vaut $\varphi(S) = (K - S)^+$. Cette formule CRR permet, tout comme la formule de Black-Scholes, de calculer la prime du Put dès que l'on s'est donné les constantes T, K, S_0, σ et r. La principale différence est que le prix dépend cette fois, en plus de ces constantes, du nombre n de pas de discrétisation de l'intervalle $[0, T]$. D'où la notation adoptée à présent, $P_0(n)$. L'objet de ce paragraphe est de montrer que, lorsque n tend vers l'infini, la limite de $P_0(n)$ existe et qu'elle est précisément égale au prix Black-Scholes (formule (8.2)), c'est-à-dire de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((K-S_T)^+) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1). \tag{8.3}$$

L'équivalent, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((S_T-K)^+) = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$ est vrai aussi dans le cas d'un Call et découlera du cas du Put en appliquant la relation de parité Call-Put. Le choix que nous faisons d'étudier ce passage à la limite dans le cas du Put apparaîtra plus loin.

Désignons par Z une v.a. prenant les deux valeurs -1 et $+1$ avec les probabilitéss $1-p$ et p respectivement, où p est la probabilité risque neutre (égale à $\frac{R-d}{u-d}$, où $R = e^{r\delta t}$, $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$). A noter que dans ce cas la loi de Z dépend de n puisque $\delta t = \frac{T}{n}$ est fonction de n. On peut alors réécrire dans le modèle CRR la v.a. S_T, donnant le prix en $t = T$ de l'actif sous-jacent, de la façon suivante : étant donnée une suite de v.a. Z_1, Z_2, ...Z_n indépendantes et ayant la même loi que Z, S_T est égal à

$$S_T = S_0 e^{Z_1\sigma\sqrt{\delta t}} e^{Z_2\sigma\sqrt{\delta t}}, \ldots, e^{Z_n\sigma\sqrt{\delta t}} = S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\tilde{Z}_n}$$

où $\tilde{Z}_n$ la v.a. $\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Z_n$. Donc si l'on pose $f(z) = (K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z})^+$, la limite que l'on veut calculer $\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((K-S_T)^+)$ s'écrit simplement

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}((K-S_T)^+) = \lim_{n\to+\infty} e^{-rT}\mathbb{E}(f(\tilde{Z}_n)). \tag{8.4}$$

où f est la fonction définie précédemment qui est à la fois continue et bornée. Nous allons voir que cette dernière propriété de f est importante et on peut noter qu'elle ne serait plus vraie pour un Call (puisque dans ce cas le payoff n'est pas borné).

On a le résultat suivant :

Proposition 8.1 *Soient T, r, σ des constantes strictement positives, $\delta t = \frac{T}{n}$, et R, d et u les quantités $R = e^{r\delta t}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$. Soit Z_1, Z_2, ...Z_n une suite de v.a. indépendantes prenant deux valeurs -1 et $+1$ avec les probabilités $1-p$ et p respectivement où p est la fonction de n donnée par $p = \frac{R-d}{u-d}$. Alors la suite $\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Z_i$ converge en loi vers une v.a. de la forme $\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2}) + \tilde{Z}$, où $\tilde{Z}$ suit une loi normale centrée et réduite.*

Rappelons que, par définition, une suite de v.a. $\tilde{Z}_n$ *converge en loi* vers $\tilde{Z}$ si et seulement si, pour toute fonction f continue et bornée, on a $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(f(\tilde{Z}_n)) = \mathbb{E}(f(\tilde{Z}))$. C'est cette caractéristique qui explique le choix du Put plutot que celui du Call pour établir la convergence du prix CRR vers le prix BS.

Preuve : Mais nous n'allons pas utiliser cette définition de la convergence en loi pour prouver cette proposition. En effet, on sait aussi qu'il est équivalent de montrer que $\tilde{Z}_n$ converge en loi vers $\tilde{Z}$ ou que la *fonction génératrice des moments* de $\tilde{Z}_n$, $M_{\tilde{Z}_n}(\tau) = \mathbb{E}(e^{\tilde{Z}_n}\tau)$, converge vers celle de $\tilde{Z}$, $M_{\tilde{Z}}(\tau) = \mathbb{E}(e^{\tilde{Z}}\tau)$. Or pour calculer la fonction génératrice des moments de $\tilde{Z}_n$, comme

$$M_{\tilde{Z}_n}(\tau) = \mathbb{E}(e^{\tilde{Z}_n}\tau) = \mathbb{E}\left(e^{(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)\frac{\tau}{\sqrt{n}}}\right) = M^n_{\tilde{Z}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right),$$

il suffit de calculer celle de la v.a. Z au point $\frac{\tau}{\sqrt{n}}$. Or Z ne prend que les deux valeurs -1 et $+1$ avec les probabilités $1-p$ et p et vaut donc simplement

$$M\tilde{Z}(\frac{\tau}{\sqrt{n}}) = (1-p)e^{-\frac{\tau}{\sqrt{n}}} + pe^{\frac{\tau}{\sqrt{n}}}.$$

En se souvenant que $p = \frac{R-d}{u-d}$ avec $R = e^{r\delta t}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, on vérifie facilement que

$$p = \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\delta t}(1 + \varepsilon(\sqrt{\delta t}))$$

$$1 - p = \frac{1}{2} - \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\delta t}(1 + \varepsilon(\sqrt{\delta t}))$$

où les $\varepsilon(\sqrt{\delta t})$ désignent des fonctions qui tendent vers 0 quand δt tend vers 0 (et donc quand n tend vers $+\infty$). Comme on a aussi

$$e^{\frac{\tau}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\tau}{\sqrt{n}} + \frac{\tau^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})$$

et

$$e^{-\frac{\tau}{\sqrt{n}}} = 1 - \frac{\tau}{\sqrt{n}} + \frac{\tau^2}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n}),$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{n}) = 0$, il en résulte que

$$M_{\tilde{Z}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\tau^2 + 2\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\tau\sqrt{T} + \varepsilon(\frac{1}{n})\right)$$

et donc que

$$M^n_{\tilde{Z}}\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(n\ln(M_{\tilde{Z}}(\frac{\tau}{\sqrt{n}}))\right) = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \varepsilon(\frac{1}{n}).$$

Lorsque n tend vers l'infini (et donc $\varepsilon(\frac{1}{n})$ vers 0), on a bien à la limite la fonction génératrice des moments d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2}), 1)$. D'où la proposition. □

Remarque : Notons que si les Z_n avaient été identiquement distribués, c'est-à-dire de même loi (indépendante de n), ce qui n'est pas le cas ici, on aurait pu utiliser le théorème de la limite central pour trouver la loi limite de $\tilde{Z}_n$. En effet, selon ce théorème, si μ et s^2 désignent l'espérance et la variance des Z_i (des constantes si les loi des Z_i sont identiques et indépendantes de n), la suite de v.a. $\frac{\tilde{Z}_n - n\mu}{s\sqrt{n}}$ converge en loi vers une v.a. Z_0 de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ce qui empèche l'application du théorème de la limite centrale ici est le fait que la suite de v.a. Z_1, Z_2, ...Z_n n'est pas *une* suite i.i.d. mais ce que l'on appelle un *vecteur triangulaire* en ce sens que, pour chaque n, la suite Z_1, Z_2, ...Z_n est bien i.i.d. mais lorsque n varie, la suite change à la fois de longueur mais aussi de loi. Mais, à défaut de pouvoir utiliser le théorème de la limite central, on reprend l'idée de sa preuve pour en généraliser l'énoncé à le cas qui nous intéresse ici.

8.3 Convergence vers Black-Scholes

Pour vérifier que la limite du prix CRR est bien le prix Black-Scholes, il reste à vérifier que, si Z_0 est une v.a. normale centrée réduite et si $f(z) = (K - S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z})^+$, on a bien

$$e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1).$$

Cela découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) &= e^{-rT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(K - S_0 e^{\sigma\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}}(\sqrt{n}z + \frac{\sqrt{T}}{\sigma}(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{n})}\right)^+ e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\
&= e^{-rT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(K - S_0 e^{\sigma\sqrt{n}z}e^{T(r - \frac{\sigma^2}{2})}\right)^+ e^{-\frac{z^2}{2}}dz
\end{aligned}$$

On peut vérifier que la quantité $S_0 e^{\sigma\sqrt{n}z}e^{T(r - \frac{\sigma^2}{2})} < K$ si et seulement si $z < -d_2$. D'où

$$\begin{aligned}
e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) &= e^{-rT}K\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right) - S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{\sigma\sqrt{n}z + T(r - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{z^2}{2}}dz\right) \\
&= e^{-rT}K\mathcal{N}(-d_2) - S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)
\end{aligned}$$

en faisant dans le second terme le changement de variable $y = z - \sigma\sqrt{T}$ pour lequel il est facile de voir que $z \in]-\infty, -d_2]$ si et seulement si $y \in]-\infty, -d_1]$. D'ou la formule cherchée

$$e^{-rT}\mathbb{E}(f(Z_0)) = e^{-rT}K\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1).$$

Remarque : Il est intéressant de noter qu'on peut réécrire la formule de prix du modèle CRR de façon à faire apparaître, comme pour la formule de Black-Scholes deux termes, que l'on peut lire comme la composition du portefeuille de couverture, le premier terme (en revenant au cas du Call) étant la partie inverstie en actif sous jacent et le second celle investie en actif non risqué (ou en cash). Sous cette forme on l'appelle la *formule exacte* de Cox, Ross et Rubinstein. Pour le voir, notons k l'entier défini par $k := \mathrm{Min}\{ \ j \in \mathbb{N} \ | \ S_0 u^j d^{n-j} > K \ \}$ et désignons par Φ la *somme binomiale incomplète* définie par $\Phi(k,n,p) := \sum_{j=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{n-j}$. On a

$$\begin{aligned}
C_0(n) &= e^{-rT}\mathbb{E}(S_T - K)^+ = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j}(S_0 u^j d^{n-j} - K)^+ \\
&= e^{-rT}\sum_{j=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j}(S_0 u^j d^{n-j} - K) \\
&= S_0 e^{-rT}\sum_{j=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (up)^j(d(1-p))^{n-j} - Ke^{-rT}\sum_{j=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1-p)^{n-j} \\
&= S_0 \sum_{j=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{n-j} - Ke^{-rT}\sum_{j=k}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^{*j}(1-p^*)^{n-j} \\
&= S_0\Phi(k,n,q) - Ke^{-rT}\Phi(k,n,p)
\end{aligned}$$

où l'on a défini q par $q = upe^{-r\delta t}$. Il convient de vérifier que l'on a bien $1-q = d(1-p)e^{-r\delta t}$ et aussi que $0 < q < 1$. Ceci découle de la relation de martingale $S = e^{-r\delta t}(pSu + (1-p)Sd)$, du fait que $0 < p < 1$ et aussi des inégalités d'absence d'opportunité d'arbitrage $0 < d < e^{r\delta t} < u < 1$.

En fait, il est aussi possible de montrer directement que $\lim \Phi(k,n,q) = \mathcal{N}(d_1)$ et $\lim \Phi(k,n,p) = \mathcal{N}(d_2)$ et d'obtenir ainsi directement la formule de Black-Scholes comme limite de la formule exacte de Cox, Ross et Rubinstein.

8.4 Vitesse de convergence

Sachant que la limite du prix Cox, Ross et Rubinstein est égale au prix Black-Scholes, on peut se demander comment se comporte le premier tend vers le second lorsque n tend vers l'infini. La convergence est-elle monotone, ou non, et surtout est-elle rapide ?

Si l'on représente sur un graphe du prix $C_0(n)$ comme une fonction de n, on s'aperçoit (voir la figure ci dessous) que la convergence est très irrégulière et qu'elle ne semble pas particulièrement rapide. En réalité, on peut montrer que

$$C_0(n) - C_{BS} = \varepsilon(\frac{1}{n})$$

c'est-à-dire que cet écart tend vers zéro comme $\frac{1}{n}$, ce qui est assez rapide (dans le cas du théorème de la limite centrale, on attend plutôt une convergence en $\frac{1}{\sqrt{n}}$).

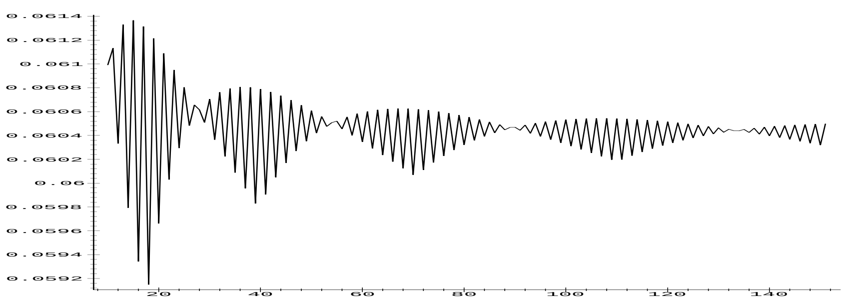


FIG. 8.1 – Tracé du prix Cox, Ross et Rubinstein $C_0(n)$ d'un Call Européen en fonction de n et de sa limite, le prix Black-Scholes.

Chapitre 9

Le modèle de Ho et Lee

Cette leçon est une modeste excursion dans un vaste et important chapitre de la finance mathématique qui concerne les taux d'intérêts et l'évaluation des produits dérivés sur ces taux. Il est beaucoup plus difficile de modéliser la dynamique des taux d'intérêt que de modéliser celle des actions, comme nous allons le voir, et pourtant c'est absolument nécessaire car il n'est pas généralement pas raisonnable de supposer, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que le taux d'intérêt r est une constante et que sa prise en compte dans les calculs de prix d'actifs financiers peut se réduire à la prise en compte d'un actif déterministe $B_t = B_0 e^{rt}$ représentant la dynamique de B_0 Euros placés au taux constant r.

Lorsqu'on parle d'intérêts, il s'agit le plus souvent de la rémunération, sous la forme de versements périodiques, d'un prêt consenti par un préteur à un emprunteur. On explique que pour le préteur, l'intérêt est le prix de la renonciation temporaire à une consommation et pour l'emprunteur c'est le coût correspondant à une consommation anticipée.

Au fil du temps les intérêts, accusés d'appauvrir les uns au profit d'autres ont fait souvent l'objet d'interdiction ou de limitations. Ils sont perçus de façon bien différente selon les cultures et selon les religions. Ainsi la Bible (dans l'ancien testament) et le Coran contiennent des versets qui condamnent fermement la pratique du prêt à intérêts. Les choses ont été codifiées dans la religion juive par l'interdiction de demander des intérêts à ses coreligionnaires, mais pas à des "étrangers". Cette même règle a été aussi longtemps en vigueur dans la religion catholique. Les protestants ont contribués à la levée progressive de son interdiction dans les pays européens, restée en vigueur jusqu'en 1830. Pour l'islam, l'interdit subsiste et le développement récent de banques islamiques fonctionnant sur des principes différents en est une conséquence importante. Quoiqu'il en soit la question de l'intérêt reste un sujet sensible qui est encore souvent perçu différemment selon les origines culturelles des intervenants.

9.1 Actifs à flux déterministes

A coté des actions et de leur produits dérivés, il existe sur les marchés à la disposition des investisseurs une autre grande famille d'actifs financiers liés au taux d'interêt dont les plus simples sont les *obligations*. Les obligations sont des contrats qui assurent à leur détenteur à la signature du contrat un flux connu de revenus composé du *principal* versé à terme et d'une succession de *coupons* versés à des dates intermédiaires. Par exemple une obligation d'état qui rapporte 1000 Euros dans 5 ans et 3% (soit 30 Euros) tous les 6 mois pourrait s'évaluer, si le taux d'intérêt annuel r était constant sur la période, comme

$$\frac{30}{(1+r)^{\frac{1}{2}}} + \frac{30}{(1+r)} + \frac{30}{(1+r)^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \frac{30}{(1+r)^{\frac{9}{2}}} + \frac{1000}{(1+r)^5}$$

et de façon plus générale, une obligation de principal P, d'échéance $T_{\max}$ et versant aux dates t_i, $0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_k = T_{\max}$, les coupons c_i aurait comme valeur à l'instant $t = 0$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{P}{(1+r)^{T_{\max}}}. \tag{9.1}$$

Mais cette formule n'est pas adaptée, non seulement parce que le taux r ne peut pas être considéré comme constant mais aussi parce qu'ici on fait implicitement l'hypothèse que les taux sont (quasiment) proportionnels à la durée du prêt ou de l'emprunt : en effet, si par exemple $t = 2t'$, comme $\frac{1}{(1+r)^t} = e^{-t\ln(1+r)} \simeq e^{-tr}$, on a donc $\frac{1}{(1+r)^{t'}} \simeq \frac{1}{(1+2r)^t}$. Or s'il est effectivement naturel de postuler qu'il y a une relation entre le taux pratiqué et la durée du contrat, une simple proportionnalité est cependant, dans la réalité, une hypothèse bien trop simplificatrice.

En pratique, l'évaluation va se faire en utilisant un taux variable déterminé à partir des prix observés à travers la notion de zéro-coupons, que nous définissons à présent.

Définition : Un *zero-coupon* de maturité T est un titre qui rapporte 1 Euros à une date future T fixée. Sa valeur à tout instant $t \in [0, T]$ (la durée restante étant $\theta := T - t$) se note $Z(t, T)$, ou encore Z_t^T et on a donc toujours $Z(T, T) = 1$.

Le zéro-coupon est un actif *théorique* que l'on introduit notamment comme référence pour calculer le prix des obligations. En effet, toute obligation de principal P, d'échéance T et versant aux dates t_i les coupons c_i peut s'écrire comme une simple combinaison linéaire de zéro-coupons $\sum_{i=1}^{k-1} c_i Z(t, t_i) + PZ(t, T_{\max})$ (pour tout $t < t_1$). En outre le zéro-coupon est aussi l'actif que nous allons modéliser dans le modèle de Ho et Lee présenté ci-dessous.

Comme les zéro-coupons ne sont pas des actifs effectivement disponibles sur le marché, les praticiens sont conduit à reconstituer, à chaque date t, les valeurs $Z(t, T)$ pour toutes les valeurs $t < T < T_{\max}$ à partir des prix observées à cette date t des obligations disponibles sur le marché. Dans un marché liquide où l'on dispose des prix d'un nombre suffisant d'obligations dont les dates de versements sont identiques (ou compatibles), c'est simplement un problème de résolution d'un système linéaire. S'il y a trop peu de prix observés, on utilise ceux dont on dispose et on complète la fonction $T \to Z(t, T)$ par diverses méthodes d'interpolation. Notons cependant que si, à toute date t, les valeurs des zéro-coupons $Z(t, T)$ peuvent en principe être calculées à partir des prix observés à cette date, et donc sont considérées comme connues à cette date, les valeurs $Z(t+\delta t, T)$ des zéro-coupons à la date suivante $t+\delta t$ et de façon générale les valeurs des zéro-coupons à une date future quelconque, sont parfaitement inconnues. Or ces valeurs peuvent varier con sidérablement. D'où l'utilité, mais aussi la dificulté d'une modélisation stochastique.

Remarque : En général, ce ne sont pas les prix (en Euros) des obligations qui sont relevés mais leur *taux actuariel*. Le taux actuariel est le taux (supposé constant) qu'il faudrait utiliser dans la formule (9.1) pour obtenir le prix observé noté P_0. En d'autres termes, le taux actuariel d'une obligation est défini implicitement par

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{P}{(1+r)^{T_{\max}}} = P_0$$

où P_0 est le prix de marché. Il est utile de remarquer, pour avoir une bonne intuition, que le taux actuariel d'une obligation augmente lorsque son prix diminue et qu'il diminue lorsque son prix augmente. A noter aussi que le taux actuariel est le seul moyen de comparer les prix de deux obligations qui n'ont pas la même structure (pas les même montants de coupons et de principal et/ou pas les mêmes dates de versements).

Remarque : On peut en fait s'interroger pour savoir pourquoi un actif (comme une obligation) dont le flux de revenus est parfaitement connu (puisqu'on connait à l'avance le montants des coupons, du principal et les dates de versement), est à regarder comme stochastique. En réalité il est facile de voir que si le taux actuariel d'une obligation d'état est r_0 et si l'on veut revendre cette obligation ultérieurement à une date où le même état émet une nouvelle obligation à un taux $r_1 > r_0$, personne n'achètera cette obligation au taux r_0 car le prix de la nouvelle obligation sera inférieur. Ceci explique que le détenteur d'une obligation fait face à un risque dès que le taux peut varier.

9.2 Courbes de taux et structure par terme

A coté du zéro-coupon $Z(t, T)$, que nous avons défini comme le prix en t d'un Euro délivré en T, il y a d'autres façons de représenter les taux d'intérêt que nous allons détailler ici. On utilise par exemple le *taux zéro-coupons*, plus souvent appelé le *rendement à maturité* (Yield to maturity), qui est la fonction $(t, T) \mapsto Y(t, T)$ définie par $Z(t, T) = e^{-Y(t,T)(T-t)}$. Si l'on applique la formule (9.1) pour exprimer le prix d'un zéro-coupon $Z(t, T)$, on obtient $Z(t, T) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} = e^{-(T-t)\ln(1+r)}$, ce qui est peu différent de $e^{-r(T-t)}$. Ceci permet de comprendre que le taux zéro-coupons $Y(t, T)$ peut être compris comme un équivalent stochastique du taux actuariel.

Définition : Pour chaque valeur de t, le graphe de la fonction $T \to Y(t, T)$ s'appelle la *courbe de taux à* l'instant t.Elle donne à un instant t fixé l'ensemble des taux pratiqués à cet instant pour des prêts de maturité δt, $2\delta t$, ... en fonction de cette maturité. L'ensemble des courbes de taux pour les différentes valeurs de t s'appelle la *structure par terme* des taux.

La connaissance de la courbe des taux $T \to Y(t,T)$ (qui est équivalente à la connaissance des prix des zéros coupons) est importante puisqu'elle permet d'exprimer le prix de n'importe quelle obligation. Comme nous l'avons souligné, les valeurs à l'instant initial $t = 0$ peuvent être déduites des prix observés sur le marché. Pour $t > 0$ par contre, elle est inconnue et peut être considérée comme une *courbe aléatoire* (v.a. à valeurs dans un ensemble de fonctions). On comprend que pour modéliser les taux, il faut modéliser la dynamique de ces courbes de taux et non seulement la dynamique d'un prix comme dans le modèle Cos-Ross-Rubinstein, ce qui explique que ce soit plus complexe.

Une autre quantité, le *taux forward instantané*, noté $f(t,T)$ remplace aussi parfois $Z(t,T)$ ou $Y(t,T)$. Ce taux est défini implicitement à partir des zéro-coupons par la formule

$$Z(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}.$$

Une dernière quantité, importante, est le *taux court* ou *taux instantané*, r_t. C'est le taux que les professionels utilisent pour les règlements de dettes ou d'avoirs entre eux d'un jour sur l'autre (taux à *un jour* ou *jj*). Cette quantité aléatoire représente le coût de l'argent d'un jour sur l'autre. On supposera que r_t désigne le taux d'actualisation entre les dates $t - \delta t$ et t, et donc $r_t = Z(t - \delta t, t)$ et $r_t \in \mathcal{F}_{t-\delta t}$. Si l'on connait les prix des zéro-coupons, on peut donc en déduire les valeurs de r_t. L'inverse n'est cependant pas vrai.

Du point de vue mathématique, c'est r_t que l'on utilise dans les modèles financiers où le taux d'intérêt sont supposés stochastiques, pour calculer l'actualisation. Ainsi, si X_t est le prix en t d'un actif, et $\tilde{X}_t$ son prix actualisé en $t = 0$, on aura $\tilde{X}_t = X_t/B_t$ où $B_t = (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t}) \dots (1 + r_t)$. L'actualisation peut donc aussi s'écrire en fonction des zéro-coupons :

$$\frac{1}{B_t} = \frac{1}{1 + r_{\delta t}} \frac{1}{1 + r_{2\delta t}} \cdots \frac{1}{1 + r_t} = Z(0, \delta t) Z(\delta t, 2\delta t) \dots Z(t - \delta t, t).$$

On peut voir B_t comme la valeur aléatoire d'une compte d'épargne ayant un dépot initial de 1 Euros et rapportant des intérêts sur la base du taux cours observé au jour le jour.

9.3 Le modèle de Ho et Lee pour les zéro-coupons

On veut maintenant introduire l'équivalent, pour les taux d'intérêt, du modèle de Cox-Ross-Rubinstein pour les actions, c'est-à-dire un modèle binomial. Comme il s'agit cette fois d'un modèle de taux, sa particularité est que les valeurs de la marche aléatoire ne sont plus des *nombres* mais des *courbes*

$$T \mapsto Z_t^T = Z(t,T) \ , \ t \le T \le T_{\max} \ , \ t \in \mathbb{T} := [0..T_{\max}]_{\delta t} \ , \ \delta t := T_{\max}/n.$$

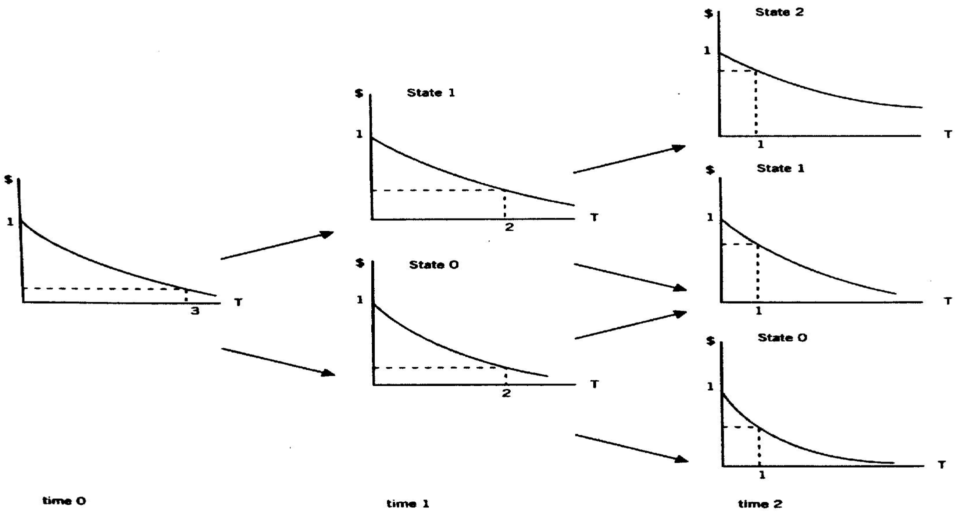
L'idée de ce modèle est de généraliser au cas stochastique la relation $Z(s,t)Z(t,u) = Z(s,u)$ pour tout $s \le t \le u$, appelée *relation de rollover.* Dans le cas de taux d'intérêt déterministes, il est en effet facile de se convaincre que cette relation doit être satisfaite puisque le terme de gauche est précisément égal à la quantité à investir à l'instant s pour avoir en t le montant précis qu'il faut investir à cet instant pour avoir un Euros à l'instant u. Mais ceci est aussi la quantité égale au terme de droite. Lorsqu'on réécrit cette relation sous la forme, $Z(t,u) = \frac{Z(s,u)}{Z(s,t)}$, on remarque que les valeurs de $Z(s,t)$ et $Z(s,u)$ étant connues à l'instant s, la relation permet de prévoir à l'instant s la valeur de $Z(t,u)$ qui, elle, est inconnue à cette date. Pour leur modèle stochastique Ho et Lee ont eu l'idée de transformer cette égalité en une récurrence stochastique

$$Z(t,u) = \frac{Z(s,u)}{Z(s,t)} \eta(s,t,u). \tag{9.2}$$

où $\eta = \eta(s,t,u)$ est une v.a. pouvant prendre deux valeurs selon que $u = 0$ ou $u = 1$. Plus précisément, on se donne une fonction déterministe $(\theta, x) \mapsto \eta(\theta, x)$ (que l'on présisera plus loin) telle que

$$Z_{t+\delta t}^T = \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+\delta t}} \eta(\theta_{t+\delta t}^T, X_{t+\delta t}), \tag{9.3}$$

où $\theta_s^T := T - s$ est le temps qui reste en $t = s$ jusqu'à la maturité $t = T$. L'idée de ce modèle est illustrée par la figure suivante tirée de l'article original de Ho et Lee.



Comme dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, $Z_{i\delta t}$ prend $i+1$ valeurs, selon le nombre de "up", $j = J_i(\omega)$, où $J_i = \delta J_1 + \ldots + \delta J_i$, $(\delta J_i)_{i\geq 1}$ étant des v.a. de Bernoulli indépendentes et de loi $\delta J_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(\pi_i, 1)$. On définit la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, et pour$k \geq 1$, $\mathcal{F}_{k\delta t} = \sigma(\delta J_1, \ldots, \delta J_k) = \sigma(X_{\delta t}, \ldots, X_{k\delta t})$, avec $X_{i\delta t} = \delta J_i$. Les fonctions aléatoires $Z_t : [t..T\mathrm{max}] \to \mathbb{R}^+$, $T \mapsto Z_t^T$, sont choisies $\mathcal{F}_t$-measurables, et même $\sigma(J_i)$-measurables pour $t = i\delta t$.

Nous allons montrer à présent que pour ce modèle la fonction η doit nécessairement prendre une forme particulière assez simple et donc que ce modèle ne dépend en fait que de 3 paramètres.

9.3.1 Un model à trois paramètres : π, δ, et n

Condition d'absence d'opportunité d'arbitrage

La première contrainte concerne l'absence d'opportunité d'arbitrage : pour tout $T \in \mathbb{T}$, la valeur actualisée de Z_t^T doit être une martingale. Pour cela on doit avoir pour tout $t \in [0..T-\delta t]$

$$Z_t^T = \mathbb{E}^*(Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^T \mid \mathcal{F}_t).$$

En utilisant (9.3), il vient

$$\begin{aligned} Z_t^T &= \mathbb{E}^*(Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(Z_t^T \eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= Z_t^T \mathbb{E}^*(\eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) \mid \mathcal{F}_t) = Z_t^T \mathbb{E}^*(\eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t})). \end{aligned}$$

puisque $X_{t+\delta t}$ est indépendent of $\mathcal{F}_t$. Donc, en divisant par Z_t^T on obtient,

$$1 = \pi_i \eta(\theta, 0) + (1-\pi_i)\eta(\theta, 1). \qquad (9.4)$$

pour tout $\theta = \theta_{t+\delta t}^T \in [\delta t..T\mathrm{max}]_{\delta t}$ Il en résulte que $\pi_i = (1-\eta(\theta,1))/(\eta(\theta,0)-\eta(\theta,1))$ ne peut changer avec i et doit être constant (égal à π). De plus, en utilisant (9.3) pour $t' := T-\delta t$, on a aussi $\theta_{t'+\delta t}^T = \theta_T^T = 0$, et

$$1 = Z_T^T = Z_{t'+\delta t}^T = \frac{Z_{t'}^T}{Z_{t'}^{t'+\delta t}} \eta(\theta_{t'+\delta t}^T, X_{t'+\delta t}) = \frac{Z_{T-\delta t}^T}{Z_{T-\delta t}^{T-\delta t+\delta t}} \eta(\theta_T^T, X_T)$$

pour $X_T \in \{0,1\}$. Donc $\eta(0,x) = 1$ pour tout $x \in \{0,1\}$. D'où la proposition suivante :

Proposition 9.1 *Tout model de taux d'intérêt satisfaisant (9.3), avec les $X_{t_i} \rightsquigarrow \mathcal{B}(\pi_i, 1)$ independents, est sans arbitrage si et seulement si $\eta(0,x) = 1$ pour tout $x \in \{0,1\}$, et si les π_i sont égaux et que leur valeur commune π satisfait la relation*

$$1 = \pi\eta(\theta, 0) + (1-\pi)\eta(\theta, 1). \qquad (9.5)$$

Condition binomiale

A présent, en utilisant le fait que pour $t = i\delta t$, Z_t^T ne dépend que de J_i, on a le résultat suivant qui fixe la forme de la fonction η :

Proposition 9.2 *Sous la condition de non arbitrage, pour tout* $\theta \in [0..T-\delta t]_{\delta t}$*, on a :*

$$\eta(\theta+\delta t,1)\eta(\theta,0)\eta(\delta t,0) = \eta(\theta+\delta t,0)\eta(\theta,1)\eta(\delta t,1), \tag{9.6}$$

et donc

$$\eta(\theta,0) = \frac{1}{\pi+(1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}}\ ,\ \eta(\theta,1) = \delta^{\frac{\theta}{\delta t}}\eta(\theta,0)\ ,\ \textit{avec}\ \delta := \frac{\eta(\delta t,1)}{\eta(\delta t,0)} > 1. \tag{9.7}$$

Preuve : Cette formule est une conséquence du fait que le modèle doit être binomial, c'est-à-dire que, pour $t = i\delta t$, Z_t^T ne doit dépendre que de $j = J_i(\omega)$ et non des valeurs particulières de $\delta J_1(\omega), \ldots, \delta J_i(w)$ dont la somme vaut $J_i(\omega)$. Ceci n'est vrai que si l'arbre est *recombinant*, c'est-à-dire si un *up* suivi d'un *down* donne le même résultat qu'un *down* suivi d'un *up*. En d'autres termes, pour $\omega' \in \Omega$ et $\omega'' \in \Omega$ tels que $J_i(\omega') = J_i(\omega'') = j$ et $J_{i+2}(\omega') = J_{i+2}(\omega'') = j+1$, mais $\delta J_{i+1}(\omega') = 1$ et $\delta J_{i+2}(\omega') = 0$ tandis que $\delta J_{i+1}(\omega'') = 0$ et $\delta J_{i+2}(\omega'') = 1$, les valeurs de $Z_{i\delta t}^T$ et de $Z_{(i+2)\delta t}^T$ ne doivent pas dépendre du fait que $\omega = \omega'$ ou $\omega = \omega''$.

Posons $\theta = \theta_{t+2\delta t}^T$ et appliquons deux fois (9.3) :

$$\begin{aligned} Z_{t+2\delta t}^T &= \frac{Z_{t+\delta t}^T}{Z_{t+\delta t}^{t+2\delta t}}\eta(\theta, X_{t+2\delta t}) = \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+\delta t}Z_{t+\delta t}^{t+2\delta t}}\eta(\theta, X_{t+\delta t})\eta(\theta, X_{t+2\delta t}) \\ &= \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+2\delta t}\eta(\delta t, X_{t+\delta t})}\eta(\theta, X_{t+\delta t})\eta(\theta, X_{t+2\delta t})\ ,\ \text{again by (9.3)} \end{aligned}$$

Donc comme $J_i(\omega') = J_i(\omega'')$ et $J_{i+2}(\omega') = J_{i+2}(\omega'')$, et comme $Z_{t+2\delta t}^T$, Z_t^T, et $Z_t^{t+2\delta t}$ ne dépendent pas du fait que $\omega = \omega'$ ou que $\omega = \omega''$, il en sera de même de

$$\frac{\eta(\theta+\delta t, X_{t+\delta t})\eta(\theta, X_{t+2\delta t})}{\eta(\delta t, X_{t+\delta t})}.$$

L'égalité des deux valeurs obtenues selon que $\omega = \omega'$ ou $\omega = \omega''$, donne

$$\frac{\eta(\theta+\delta t,1)\eta(\theta,0)}{\eta(\delta t,1)} = \frac{\eta(\theta+\delta t,0)\eta(\theta,1)}{\eta(\delta t,0)}.$$

A présent, comme d'après (9.5) on a $\eta(\theta,1) = \frac{1}{1-\pi}(1-\pi\eta(\theta,0))$, donc (9.3) devient

$$\frac{1}{1-\pi}(1-\pi\eta(\theta+\delta t,0)\eta(\theta,0)\eta(\delta t,0) = \frac{1}{(1-\pi)^2}\eta(\theta+\delta t,0)(1-\pi\eta(\theta,0))(1-\pi\eta(\delta t,0)). \tag{9.8}$$

Posons $x_n = \frac{1}{\eta(\theta,0)}$, $x_{n+1} = \frac{1}{\eta(\theta+\delta t,0)}$, et donc $x_1 = \frac{1}{\eta(\delta t,0)}$, l'égalité (9.8) devient

$$(1-\pi)\left(1-\frac{\pi}{x_{n+1}}\right)\frac{1}{x_n}\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_{n+1}}\left(1-\frac{\pi}{x_n}\right)\left(1-\frac{\pi}{x_1}\right).$$

Soit, en multipliant les deux termes par $x_1x_nx_{n+1}$, on obtient $(1-\pi)(x_{n+1}-\pi) = (x_n-\pi)(x_1-\pi)$, ou, de manière équivalente, $x_{n+1} = \pi + \frac{1}{1-\pi}(x_n-\pi)(x_1-\pi) =: x_n\delta+\gamma$, avec $\delta = \frac{x_1-\pi}{1-\pi}$ et $\gamma = \pi - \frac{\pi}{1-\pi}(x_1-\pi) = \pi(1-\delta)$. Comme $x_1 = \frac{1}{\eta(\delta t,0)}$, on obtient $\eta(\delta t,0) = \frac{1}{\pi+(1-\pi)\delta}$. Et comme $1 = \pi\eta(\delta t,0)+(1-\pi)\eta(\delta t,1)$,

$$\delta = \frac{1}{1-\pi}\left(\frac{1}{\eta(\delta t,0)}-\pi\right) = \frac{1}{1-\pi}\frac{1-\pi\eta(\delta t,0)}{\eta(\delta t,0)} = \frac{\eta(\delta t,1)}{\eta(\delta t,0)}.$$

Finalement, en résolvant $x_n = x_{n-1}\delta+\pi(1-\delta)$ il vient $x_n = (1-\pi)\delta^n+\pi$, d'où

$$\eta(\theta,0) = \eta(n\delta t,0) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\pi+(1-\pi)\delta^n} = \frac{1}{\pi+(1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}},$$

et

$$\eta(\theta,1) = \frac{1}{1-\pi} - \frac{\pi}{\pi+(1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}} = \frac{\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}}{\pi-(1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}} = \delta^{\frac{\theta}{\delta t}}\eta(\theta,0).$$

□

9.4 Exemples de produits derivés de taux

Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souhaiter souscrire un contrat qui prendra en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal K. Typiquement, si l'intérêt r_T est payable à la date T pour l'emprunt d'un euro à la date $T - \delta t$, ce contrat payera $(r_T - K)^+$. Ce contrat s'appelle un *caplet à* l'échéance T au plafond K. Il donne une assurance contre une envolée du taux (taux plafond) à l'instant T. Pour le prêt d'un Euro remboursable à la date $T_{\max}$ et à intérêts payables à intervalle $\delta t =$ un an, il convient de souscrire un *Cap*, qui est la somme de tous les caplets d'échéance $T \in]0..T_{\max}]_{\delta t}$. Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date $t-\delta t$, par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en $Z^t_{t-\delta t}$ et en placement (risqué) en $Z^{t+\delta t}_{t-\delta t}$. Ceci se calcule de manière similaire au cas des options pour un modèle binaire d'action et, comme les processus $(\tilde{Z}^T_t)_{t\in[0..T]}$ sont, pour tout $T \in \mathbb{T}$, des $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$-martingales, on retrouve pour la valeur du portefeuille de couverture

$$\mathrm{Caplet}^T_{t-\delta t} = \mathbb{E}^*(\mathrm{Caplet}^T_t \mid \mathcal{F}_{t-\delta t})/(1 + r_t) \tag{9.9}$$

(et plus généralement, pour tous $s \leq t$, $\mathrm{Caplet}^T_s = \mathbb{E}^*\left(\mathrm{Caplet}^T_t \frac{B_s}{B_t} \mid \mathcal{F}_s\right)$).

A coté des Caps composés de caplets, il existe de même des Floors composés de floorlets, qui protègent d'une dégringolade du taux (taux plancher), dont le prix se calcule de manière analogue puisqu'il s'agit alors d'un Put (ou d'une famille de Puts). Enfin il existe également un grand nombre d'autres contrats dérivés de taux, comme les Collars (achat d'un Cap et vente simultanée d'un Floor de même caractéristiques), Swaps (échange d'un taux variable contre un taux fixe), Swaptions (option sur Swap) ou FRA (Forward Rate Agreement)...

Remarque : Le modèle de Ho et Lee étudié ici est un modèle discret. Les versions continues correspondantes appartiennent à la famille des modèles HJM (pour Heath, Jarrow et Morton) et sont des modèle du taux forward instantané $f(t, T)$ et non du zéro-coupons $Z(t, T)$. Il existe aussi plusieurs modèles continus pour le taux court r_t (dont un du à Ho et Lee, à ne pas confondre...) mais ces modèles ne permettent pas de représenter l'ensemble de la dynamique de la structure par terme.

Remarque : Notons pour finir que le modèle de Ho et Lee, comme c'est le cas généralement des modèles dit *modèles de taux*, ne prend en compte que le risque dit *rique de taux* correspondant aux variations du taux dues à l'inflation et autres aléa économiques mais pas le risque dit *risque de crédit* ou *de défaut* qui correspond au niveau plus ou moins bon de confiance du détenteur de l'obligation ou du prêt dans la qualité de l'emprunteur quand à un possible défaut (de remboursement). C'est la raison pour laquelle une obligation d'état (en Europe) est généralement moins chère qu'une obligation souscrite auprès d'une entreprise de même caractéristiques. Le risque de crédit est habituellement séparé dans la modélisation du risque de taux et il existe des produits spécifiques dit *produits dérivés de crédit* qui servent à couvrir ce second risque. Le modèle de Ho et Lee ne prend pas du tout en compte le risque de crédit.

Bibliographie

[1] Martin Baxter and Andrew Rennie. *Financial calculus.* Cambridge University Press, 1999.

[2] Thomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time.* Oxford University Press, 2004.

[3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–659, 1973.

[4] Nicolas Bouleau. *Martingales et marchés financiers.* Editions Odile Jacob, 1998.

[5] John Cox, Stephen Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing : A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–263, 1979.

[6] Rose-Anne Dana and Monique Jeanblanc-Piqué. *Marchés financiers en temps continu.* Economica, 1998.

[7] John Hull. *Options, Futures, and other derivatives.* Prentice-Hall, 1997.

[8] Jean Jacod and Philip Protter. *L'essentiel en théorie des probabilités.* Cassini, 2003.

[9] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39 of *Application of Mathematics, stochastic modelling and applied probability.* Springer, 1998.

[10] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, volume 9 of *Mathématiques et applications.* Ellipse, 1993.

[11] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale methods in Financial modelling*, volume 36 of *Applications of mathematics.* Springer, 1997.

[12] Stanley R. Pliska. *Introduction to mathematical finance, discrete time models.* Blackwell publishers, 1997.

[13] Albert N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance*, volume 3 of *Advanced series on statistical science and applied probability.* World scientific, 1999.

[14] Paul Wilmott. *Derivatives.* John Wiley and sons, 1998.

[15] Paul Wilmott, Sam Howison, and Jeff Dewynne. *The mathematics of financial derivatives.* Cambridge University Press, 1995.