

## Cours 6 : Options barrières

Dans cette leçon, on va étudier l'exemple le plus simple d'option *exotique*, c'est-à-dire d'option dont la valeur n'est pas seulement fonction des valeurs atteintes par l'actif sous-jacent à l'échéance mais aussi de toutes les valeurs qu'il prend pendant la durée du contrat. De telles options s'appellent aussi des options *dépendant du chemin*. L'étude des options barrières sera aussi l'occasion de rencontrer la notion de *temps d'arrêt*, notion fondamentale du calcul stochastique.

### 1 Définitions et exemples

Une option barrière  $(T, \varphi(S_T), L)$  est un produit dérivé sur un actif sous-jacent  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  pour lequel le versement de la fonction de paiement  $\varphi(S_T)$  à l'échéance  $T$  est soumis au fait que l'actif sous-jacent ait franchi ou non, durant la durée de vie du contrat, vers le haut ou vers le bas, une barrière  $L$  donnée. Il existe une grande variété d'option barrière; on peut ranger les plus courantes en deux catégories :

- **les knock-out** : l'option expire automatiquement lorsque le sous-jacent touche la barrière.
- **les knock-in** : l'option n'est activée que si le sous-jacent touche la barrière.

Par ailleurs, ces options s'appellent put, call, options binaires, etc., ..., selon que  $\varphi(S) = (K - S)^+$ ,  $\varphi(S) = (S - K)^+$ ,  $\varphi(S) = \mathbb{I}_{S > K}$ , etc., ... Voici quelques exemples :

- Un *down and out call* (DOC) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  est le droit d'acheter l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  si celui-ci n'est jamais descendu en dessous de  $L$  pendant la durée de vie du contrat.
- Un *down and in put* (DIP) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  seulement si celui-ci est descendu en dessous de  $L$  pendant la durée de vie du contrat.
- Un *up and out put* (UOP) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  si celui-ci n'a jamais dépassé le niveau  $L$  pendant la durée de vie du contrat.

Il existe de même des options DIC, UIC, UIP, DOP et UOC, mais aussi des options avec doubles barrières et bien d'autres. Souvent le contrat prévoit une *rebate*, somme payée en cash, dans le cas où l'option est out.

Le principal intérêt des options barrières est qu'elles sont moins chères que les options ordinaires correspondantes, environs quatre fois moins chères, car elles laissent à l'acheteur, et d'ailleurs aussi au vendeur, un risque résiduel. Par exemple pour une option DIC, la couverture qu'un call offre par rapport à une envolée du cours du sous-jacent est tout simplement perdue dans le cas où celui-ci n'a pas franchi la barrière. Mais ce risque est jugé suffisamment improbable par celui qui accepte de le prendre ou bien il considère que ses conséquences sont acceptables au regard de l'économie qu'il procure. Pour le vendeur, l'un des intérêts est que, comme les options barrières se négocient uniquement de gré à gré (et non sur les marchés organisés comme c'est le cas pour les put et les call ordinaires), il peut prendre en général des marges plus élevées car le marché des produits OTC (over the counter) est moins tendu.

A titre d'exemple, considérons une entreprise qui va recevoir dans 6 mois en Euros des revenus perçus en Yen et qui craint qu'une dépréciation du Yen par rapport à l'Euro dans les mois à venir vienne mettre en péril le niveau de ces revenus. Elle peut acheter un put à 6 mois qui lui donnera le droit de vendre des Yens en Euros à un prix fixé, par exemple égal ou légèrement inférieur au cours actuel. Mais si l'entreprise achète une option DIP, avec une barrière  $L$  peu inférieure au prix d'exercice  $K$ , cela lui en coûtera bien moins chère et cela lui assurera la même couverture contre une dépréciation du Yen, sauf dans le cas où à aucun moment donné durant ces 6 mois, le cours ne descend en dessous de  $L$ . Mais ce cas correspond à une situation où la dépréciation redoutée est restée très limitée et le risque résiduel peut donc être jugé sans gravité.

Ce sont des situations de ce type qui conduisent au développement du marché des options barrières; celles-ci constituent plus de 10% de l'activité sur le marché des changes par exemple.

### 2 Mesurabilité et temps d'arrêt

Rappelons que si  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé,  $\mathcal{T}$  une sous tribu de  $\mathcal{F}$ , on dit qu'une v.a.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est *mesurable* par rapport à  $\mathcal{T}$ , ou qu'elle est  $\mathcal{T}$ -mesurable, si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{X \leq x\} \in \mathcal{T}$ .

Il est clair que si  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ , une v.a.  $\mathcal{T}$ -mesurable est nécessairement constante et si  $A$  étant une partie de  $\Omega$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ , une v.a.  $\mathcal{T}$ -mesurable aura au plus deux valeurs. Plus généralement, on a la proposition suivante :

**Proposition 1** *Lorsque  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé fini et  $\mathcal{T}$  une sous tribu de  $\mathcal{F}$ , une v.a. est  $\mathcal{T}$ -mesurable si et seulement si elle est constante sur les atomes de la tribu  $\mathcal{T}$ .*

Il est aussi utile de connaître la notion de *tribu engendrée par une v.a.* dont nous rappelons la définition :

**Définition :** Si  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une v.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , on appelle *tribu engendrée* par  $X$ , notée  $\sigma(X)$ , la plus petite sous tribu de  $\mathcal{F}$  par rapport à laquelle  $X$  est mesurable. Plus généralement si  $X_1, X_2, \dots, X_m$  est une suite de v.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , la tribu engendrée par cette suite de v.a., notée  $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_m)$  est la plus petite sous tribu de  $\mathcal{F}$  par rapport à laquelle toutes les v.a.  $X_i, i = 1, \dots, m$ , sont mesurables.

**Exemple :** On a vu qu'on peut associer à toute marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  telle que, pour un  $t \in \mathbb{T}$  donné, les atomes de  $\mathcal{F}_t$  sont formés des états du monde  $\omega \in \Omega$  dont les trajectoires  $X(\omega)$  coïncident jusqu'à l'instant  $t$ . On se convainc facilement que les v.a.  $X_t$  sont  $\mathcal{F}_t$ -mesurables et aussi  $\mathcal{F}_s$ -mesurable pour tout  $s \geq t$  mais  $X_t$  n'est généralement pas  $\mathcal{F}_s$ -mesurable pour  $s < t$ . Intuitivement la propriété d'être  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour une v.a. sur  $\Omega$  signifie simplement,  $\mathcal{F}_t$  représentant l'information dont on dispose à l'instant  $t$ , que cette v.a. ne dépend que de l'information dont on dispose à cet instant ou plus simplement qu'elle est *connue* à l'instant  $t$ , mais qu'elle ne peut pas prévoir l'avenir, c'est-à-dire distinguer (en leur donnant des valeurs différentes) deux trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant  $t$  mais ne coïncideraient plus au delà.

En particulier il est facile de voir que si  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est la filtration associée à une m.a.  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de Cox-Ross-Rubinstein,  $S_T$  est une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable de même que toute v.a. de la forme  $\varphi(S_T)$  où  $\varphi$  est une fonction (déterministe) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque :** Il y a un point un peu subtile qu'il est important de noter ici : pour une marche aléatoire  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , les deux tribus  $\mathcal{F}_t$  et  $\sigma(X_t)$  ne sont pas égales. La première représente l'information dont on dispose jusqu'à l'instant  $t$  et la seconde l'information dont on dispose à l'instant  $t$ . En réalité on a  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_{\delta t}, \dots, X_{t-\delta t}, X_t)$  et donc  $\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$  mais cette inclusion est stricte. Une v.a. qui est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, donne donc nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide jusqu'à l'instant  $t$  et donc, en particulier la même valeur pour deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$ , alors qu'une v.a.  $\sigma(X_t)$ -mesurable donne la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$ , mais pas nécessairement la même valeur à deux états du monde pour lesquels  $X_t$  coïncide à l'instant  $t$  mais pas à un instant antérieur.

La notion de *temps d'arrêt* formalise l'idée d'un instant où quelque chose se produit, par exemple le passage d'une barrière, sans que cela ait lieu nécessairement au même instant sur toutes les trajectoires : en ce sens c'est une temps *aléatoire* puisque sa valeur dépend de l'état du monde.

**Définition :** Si  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  est un espace probabilisé et  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une filtration, une v.a.  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{T}$  est un *temps d'arrêt* si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ .

On peut vérifier que la condition "pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ " est équivalente à la précédente. L'exemple suivant est l'un des exemples de temps d'arrêt les plus utilisés :

**Exemple :** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une m.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ ,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  sa filtration associée et  $A \subseteq \mathbb{R}$  un sous ensemble quelconque. La v.a. suivante qui représente *le premier instant d'entrée d'une trajectoire dans le sous ensemble  $A$*  est un temps d'arrêt :

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \text{Min } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Par contre on voit facilement que la v.a. suivante n'est pas un temps d'arrêt :

$$\theta(\omega) := \begin{cases} \text{Max } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

La caractérisation suivante des temps d'arrêt est souvent très utile :

**Proposition 2** Si  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une m.a. sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$ , et  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  la filtration associée, une v.a.  $\tau$  est un temps d'arrêt si et seulement si

$$[\tau(\omega) = t \text{ et } \omega' \stackrel{t}{\sim} \omega] \Rightarrow \tau(\omega') = t$$

En utilisant cette caractérisation, on montre par exemple que si  $\tau$  et  $\tau'$  sont deux temps d'arrêt alors  $\tau \wedge \tau' := \text{Min}(\tau, \tau')$  est encore un temps d'arrêt, de même que  $\tau + c$ , où  $c$  est une constante.

### 3 Calcul du prix d'une option DIC

Pour calculer le prix d'une DIC, nous allons supposer comme précédemment que l'actif sous-jacent suit un modèle CRR mais nous choisissons cette fois un taux d'escompte  $r = 0$  pour simplifier.

**Définition :** Soit  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une m.a. CRR sur  $(\Omega, P, \mathcal{F})$  et soit  $L > 0$ . La v.a. suivante est un temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  associée :

$$\tau_L(\omega) := \begin{cases} \text{Min} \{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq L\} & \text{si } \{t \in \mathbb{T}, S_t(\omega) \leq L\} \neq \emptyset \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $S_t(\omega)$  est la trajectoire correspondant à l'état du monde  $\omega$ ,  $\tau_L(\omega)$  désigne donc le premier instant qui suit le franchissement de la barrière  $L$  si cet instant précède  $T$  et il vaut  $T$  si la trajectoire ne franchit pas la barrière avant  $T$ . On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un temps d'arrêt en utilisant la caractérisation donnée par la proposition 2.

Ce temps d'arrêt permet d'exprimer par une formule la valeur à l'échéance ou payoff d'une option DIC :

**Définition :** Une down and in call (DIC) de prix d'exercice  $K$ , d'échéance  $T$  et de barrière  $L$  souscrite sur un actif modélisé par une m.a. CRR  $(S_t)$  a pour valeur à l'échéance :

$$\psi_T = (S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L < T}$$

où  $\mathbb{I}_{\tau_L < T}$  est la v.a. sur  $\Omega$  qui vaut 1 si  $\tau_L < T$  et 0 sinon.

On a vu lors des leçons précédentes comment calculer le prix d'une option  $(T, \varphi(S_T))$  sur un sous-jacent  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de type CRR : c'est la formule fondamentale. Dans ce cas le payoff  $\varphi(S_T)$  est une v.a.  $S_T$ -mesurable c'est-à-dire que  $\varphi(S_T)$  est connu dès qu'on connaît la valeur atteinte par  $(S_t)$  en  $t = T$ . Dans le cas d'une option barrière, la valeur atteinte par  $(S_t)$  en  $t = T$  ne suffit pas pour calculer le payoff, il faut en plus connaître la trajectoire suivie par  $S_t$  entre  $t = 0$  et  $t = T$  puisqu'il faut savoir si celle-ci a franchi la barrière ou non. Cela signifie que la valeur de l'option à l'échéance n'est plus  $\sigma(S_T)$ -mesurable mais bien  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. D'où la nécessité de généraliser la formule fondamentale :

**Proposition 3** Dans un marché financier  $(S_t, B_t)_{t \in \mathbb{T}}$  où  $S_t$  suit un modèle CRR, en supposant le taux d'escompte nul, le prix à l'instant  $t = 0$  d'une option  $(T, \psi_T)$ , où  $\psi_T$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, est donnée par  $\psi_0 = e^{-rT} \mathbb{E}(\psi_T) = e^{-rT} \mathbb{E}((S_T - K)^+ \mathbb{I}_{\tau_L < T})$ , c'est-à-dire qu'il est égal à l'espérance actualisée, sous la probabilité risque neutre, de sa fonction de paiement.

La preuve de cette proposition consiste simplement à reprendre celle de la formule fondamentale et de vérifier que seule la  $\mathcal{F}_T$ -mesurabilité du payoff et non la  $\sigma(S_T)$ -mesurabilité a été utilisée.

## 4 Code Scilab pour le calcul d'une option DIC

```
////////Indicatrice de la région sous la barrière////////
function indi=sousL(i,j);
    if SS(i+1,j+1)<=L then indi=1;
    else indi=0;
    end;
endfunction;
////////Calcul des valeurs de la DIC
DICC=zeros(n+1,n+1,2);
for j=0 :n
    for k=0 :1
        if k==1 then DICC(n+1,j+1,k+1)=phi(SS(n+1,j+1));
        else DICC(n+1,j+1,k+1)=0;
        end;
    end;
end;
for i=n-1 :-1 :0
    for j=0 :i
        for k=0 :1
            DICC(i+1,j+1,k+1)=(p*DICC(i+1+1, j+1+1, max(k, sousL(i+1,j+1))+1) + (1-p)*DICC(i+1+1,
j+1, max(k, sousL(i+1,j))+1))/R;
        end;
    end;
end;
```