Chapitre 1

Prix et couverture d'une option d'achat

Dans cette première leçon, on explique comment on peut calculer le prix d'un contrat d'option en évaluant celui d'un portefeuille de couverture de cette option. On se place dans un cas très simple, celui d'une option d'achat sur un actif financier dont on a modélisé la dynamique au moyen d'un arbre binaire. Le taux d'intérêt monétaire est supposé constant pendant la durée du contrat.

Définition : Une *option* d'achat (européenne)*, encore appelée call*, est un titre donnant droit à son détenteur d'acheter un actif financier à une date future et à un prix fixé. Il s'agit d'un droit et non d'une obligation. Le prix fixé s'appelle le *prix d'exercice* de l'option et la date de fin du contrat la *date d'échéance* ou *date d'exercice*. L'actif financier sur lequel porte le contrat s'appelle l'*actif sous-jacent*.

Le propre d'un contrat d'option, tient à ce qu'à la date de souscription, la valeur à l'échéance de l'actif sous-jacent n'est pas connue mais le paiment que pourra exiger le détenteur de l'option, s'il exerce l'option, dépend de cette valeur à l'écheance. C'est pourquoi on appelle aussi les options des *contrats contingents*. On peut comprendre, dans un premier temps, un tel contrat comme un contrat d'assurance : le vendeur de l'option est l'assureur, l'acheteur l'assuré, ce dernier cherchant à se couvrir contre une envolée de la valeur du sous-jacent. Il s'agit alors d'un contrat de transfert de risque moyennant un prix. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une différence essentielle entre un contrat d'assurance classique (assurance habitation ou automobile) et un contrat d'option.

L'exemple le plus naturel d'actif financier est sans doute celui d'une action cotée en bourse, comme l'action Micsft ou Netscp sur le NASDAQ ou AmOnLne sur le NYSE. Mais cela peut aussi être le cours d'une matière première comme le prix d'une tonne de zing ou celui d'un produit agricole tel le prix de 50.000 livres de boeuf. Les premiers contrats d'option étaient des contrats sur cours agricoles déjà courants au siècle dernier. Les contrats d'option sur actions se sont vraiment développés lorsqu'ils ont pu faire l'objet d'une négociation en bourse, c'est-à-dire à partir des années 70 sur le CBOT, à Chicago, puis progressivement dans la plupart des autres places financières.

1.1 Evaluation du prix dans un modèle à une étape

Pour évaluer le prix d'une option d'achat à l'instant initial, c'est-à-dire la somme à verser par l'acheteur au vendeur, plaçons nous tout d'abord dans un cas très simple. Notons $t = 0$ l'instant de souscription de l'option, $t = T$ son échéance et K son prix d'exercice. Supposons que l'actif sous-jacent ait la valeur S_0 à l'instant initial et qu'il ne puisse prendre que deux valeurs $S_T = S_0 u$ ou $S_T = S_0 d$ à l'échéance, avec $0 < d < 1 < u$. On verra qu'il est naturel de supposer en outre que $S_0 d < K < S_0 u$. Soit C_0 la valeur, à déterminer, du call à l'instant $t = 0$; c'est le prix du contrat, ou la *prime*. A l'instant initial le vendeur ne sait pas si S_T prendra la valeur $S_0 u$ ou $S_0 d$, mais il peut évaluer ce qu'il devra à l'acheteur dans chacun des deux cas : si $S_T = S_0 d$, l'acheteur n'exercera pas (puisqu'il peut alors acheter l'actif sous-jacent sur le marché à un prix inférieur à K) et donc la valeur de l'option est nulle ; par contre si $S_T = S_0 u$, l'acheteur réclamera au vendeur la différence entre le prix de marché et le prix convenu K, soit $S_0 u - K$, somme lui permettant d'effectuer son achat à ce prix. Comment le vendeur peut-il, avec la prime qu'il a reçue, faire face à ses engagements ? L'idée est d'utiliser la prime pour constituer un portefeuille, appelé *portefeuille de couverture* Π, composé de a actifs S_0 et de b unités monétaires, et de choisir sa composition a et b de telle façon que sa valeur à l'échéance soit précisément celle de l'option, c'est-à-dire 0 si $S_T = S_0 d$ et

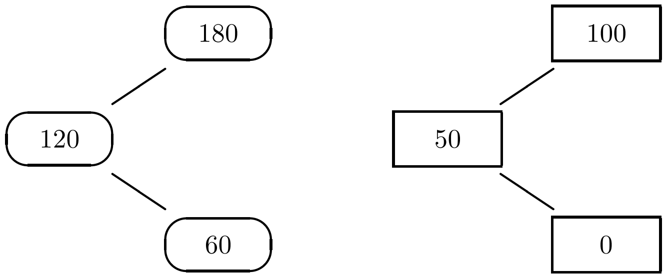


Fig. 1.1 – Un exemple de modèle à une étape

$S_0u - K$ si $S_T = S_0u$. . Si l'on désigne par r le taux d'intérêt monétaire, la *composition du portefeuille* (a, b) devra donc vérifier les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} aS_0u + be^{rT} & = & S_0u - K \\ aS_0d + be^{rT} & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

On résout facilement ce système (système linéaire de deux équations à deux inconnues a et b) et on déduit des valeurs de a et b obtenues la valeur du portefeuille à l'instant initial $\Pi_0 = aS_0 + b$. On peut alors donner à C_0 la valeur $C_0 = \Pi_0$.

Exemple : Par exemple, si $S_0 = 120$, $u = 1,5$, $u = 0,5$, $r = 0$, et $K = 80$, la résolution du système (1.1) donne $a = \frac{5}{6}$, $b = -50$ et donc $\Pi_0 = 50$. Cela signifie que, ayant touché la prime fixée à $C_0 = 50$, le vendeur emprunte 50 (car $b = -50$) et achète $a = \frac{5}{6}$ de S_0 (au prix 100) ; à l'échéance, son portefeuille vaudra soit $150 = \frac{5}{6}180$, si $S_T = S_0u$, et il paiera alors $100 = 180 - 80$ au détenteur du call et remboursera les 50 empruntés (sans interêts puisqu'on a supposé $r = 0$), soit il vaudra $50 = \frac{5}{6}60$, si $S_T = S_0d$, ce qui, compte tenu du fait que le détenteur du call ne viendra pas l'exercer, lui permet de rembourser les 50 empruntés.

Remarque : Notons que pour que le problème admette une solution, il suffit que le système (1.1) admette une solution, ce qui est assuré dès que $u \neq d$, ce qui est précisément l'origine du sens du contrat : si l'actif sous-jacent n'avait qu'un seul prix à $t = T$, il n'y aurait pas besoin de souscrire d'option !

Remarque : Le raisonnement précédent se généralise facilement à d'autres contrats d'option ; par exemple pour un contrat d'option qui donne le droit de vendre au prix K (au lieu du droit d'acheter), appelé un *put*, sa valeur à l'échéance sera $K - S_0d$ si $S_T = S_0d$ et 0 si $S_T = S_0u$. Plus généralement, si l'on désigne par $C_T = \varphi(S_T)$ le prix du contrat d'option à l'instant T, la résolution du système (1.1) dans ce cas montre que la composition du portefeuille en actif sous-jacent sera donnée par

$$a = \frac{\varphi(S_0u) - \varphi(S_0d)}{S_0u - S_0d} \tag{1.2}$$

Les praticiens désignent ce quotient sous le nom de *delta de couverture* (ou simplement *delta*). Il désigne la quantité d'actifs sous-jacent qu'il faut avoir dans son portefeuille si l'on veut couvrir l'option.

1.2 Modèle à deux étapes : couverture dynamique.

La seule idée du portefeuille de couverture (a, b) constitué à l'instant initial ne suffit plus si l'option peut prendre trois valeurs à l'échéance (parce que l'actif sous-jacent en prendrait trois). Par contre, si l'on ajoute la possibilité de modifier, à une date intermédiaire (entre $t = 0$ et $t = T$) la composition du portefeuille constitué à la date initiale, en tenant compte de la valeur S_t du sous-jacent à cette date, on peut trouver une solution à ce problème : c'est l'idée de la couverture dynamique.

Considérons un modèle à deux étapes de l'actif sous-jacent : $t \in \{0, \delta t, 2\delta t = T\}$ et (S_t) prenant la valeur S_0 à l'instant initial, l'une des deux valeurs $S_{\delta t} = S_0d$ ou $S_{\delta t} = S_0u$ à l'instant intermédiaire $t = \delta t$ et l'une des trois valeurs $S_T = S_0d^2$, $S_T = S_0ud$ ou $S_T = S_0u^2$ à l'échéance. Pour déterminer la

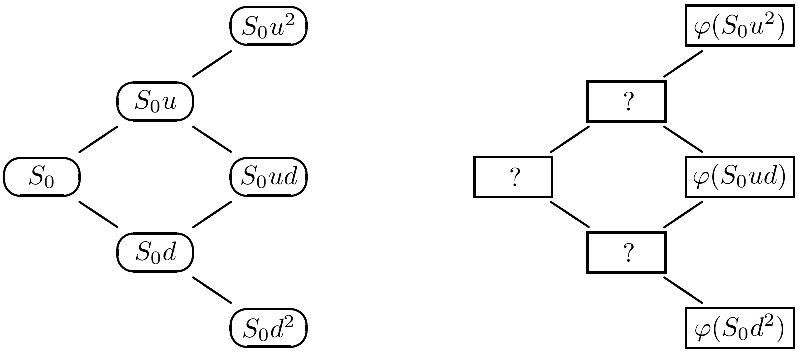


FIG. 1.2 – Quelles valeurs donner à l'option aux instants $t = \delta t$ et $t = 0$?

valeur d'un portefeuille de couverture d'une option $C_T = \varphi(S_T)$, raisonnons en partant de sa valeur Π_T à l'échéance, qui est connue puisque, pour *couvrir* l'option il devra valoir $\Pi_T = \varphi(S_T)$, somme due en $t = T$ par le vendeur à l'acheteur de l'option. Il y a trois possibilités pour cette valeur, selon les valeurs prises par S_T. En utilisant la même méthode que dans le cas d'un modèle à une étape, on peut calculer les deux valeurs $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t} S_{\delta t} + b_{\delta t}$ que devra prendre le portefeuille à l'instant $t = \delta t$, selon que $S_{\delta t} = S_0 d$ ou $S_{\delta t} = S_0 u$. Pour cela, il suffit de résoudre les deux systèmes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0u^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0u^2) \\ aS_0ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0ud) \end{array} \right. \tag{1.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0ud + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0ud) \\ aS_0d^2 + be^{r\delta t} & = & \varphi(S_0d^2) \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Désignons par $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ les deux valeurs de $\Pi_{\delta t} = a_{\delta t} S_{\delta t} + b_{\delta t}$ obtenues en remplaçant d'une part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (1.3) et $S_{\delta t}$ par $S_0 u$ et d'autre part $(a_{\delta t}, b_{\delta t})$ par la solution du système (1.4) et $S_{\delta t}$ par $S_0 d$. Pour obtenir la valeur cherchée du portefeuille à l'instant initial, qui sera comme précédemment la valeur initiale de l'option (ou prime), il reste alors simplement à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aS_0u + be^{r\delta t} & = & \Pi^u_{\delta t} \\ aS_0d + be^{r\delta t} & = & \Pi^d_{\delta t} \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Exemple : Soit un titre valant $S_0 = 80$ et changeant deux fois de prix avant l'échéance en $T = 2\delta t$. Observons que dans l'exemple précédent nous avions, à $t = \delta t$, $S_{\delta t} = S_0(1 + \frac{1}{2})$ ou $S_{\delta t} = S_0(1 - \frac{1}{2})$. Supposons qu'ici S suive un processus analogue :

$$S_{\delta t} = S_0(1 \pm \tfrac{1}{2}) \ , \ S_{2\delta t} = S_{\delta t}(1 \pm \tfrac{1}{2}).$$

Cela donne pour cet actif la dynamique indiquée figure 1.2 :

$$S_0 = 80 \quad \text{devient} \quad S_{\delta t} = 120 \text{ ou } S_{\delta t} = 40 \tag{1.6}$$

$$S_0 = 120 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 180 \text{ ou } S_{2\delta t} = 60 \tag{1.7}$$

$$S_0 = 40 \quad \text{devient} \quad S_{2\delta t} = 60 \text{ ou } S_{2\delta t} = 20 \tag{1.8}$$

Soit une option call de date d'exercice $T = 2\delta t$ et prix d'exercice $K = 80$ (lorsque $K = S_0$, on dit que c'est une option “à la monnaie”). On suppose, pour simplifier, que le taux d'intéret monétaire r est ici égal à 0.

Observons que si $S_{\delta t} = 120$ nous retrouvons l'exemple précédent et comprenons que le portefeuille de couverture, dans ce cas (c'est-à-dire si $S_{\delta t} = 120$), doit valoir

$$\Pi^u_{\delta t} = 50.$$

Qu'en est-il si $S_{\delta t} = 40$? Inutile de faire des calculs : les deux seules possibilité à venir pour $S_{2\delta t}$ sont 60 ou 20. Comme ces deux valeurs sont inférieures au prix d'exercice $K = 80$, on aura dans les deux cas $\varphi(S_{2\delta t}) = 0$, et donc $a_{\delta t} = b_{\delta t} = \Pi_{\delta t} = 0$ puisqu'il n'y a plus rien à couvrir dans ce cas.

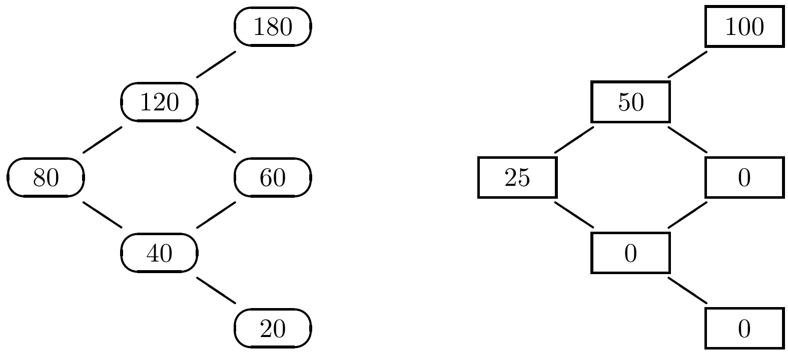


FIG. 1.3 – Deux pattes-d'oie : la première représente l'évolution sur deux étapes d'un actif à dynamique stochastique binaire, avec $S_0 = 80$ et $S_{t+\delta t} = S_t(1 \pm 0.5)$; la seconde celle du portefeuille de couverture d'un call sur cet actif de prix d'exercice $K = 80$.

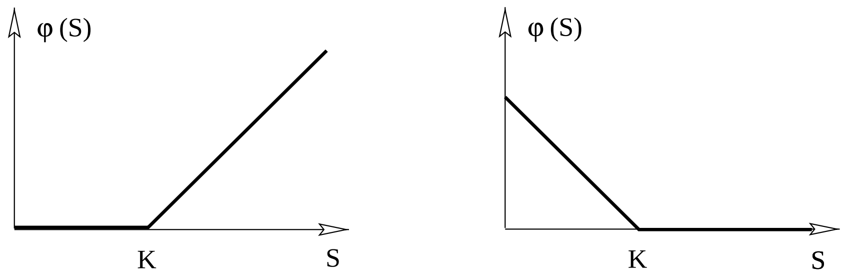


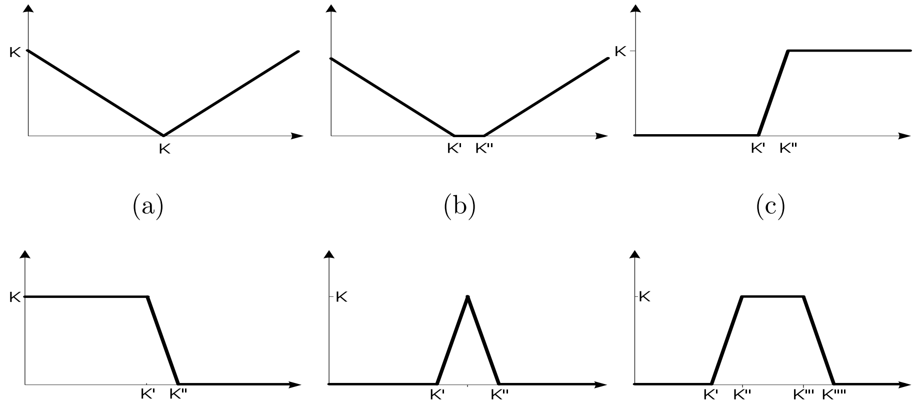
FIG. 1.4 – Fonction de paiement (ou pay-off) d'un call et d'un put : l'option call est l'option qui assure à son détenteur de pouvoir *acheter*, à la date d'échéance T, l'actif S à un prix maximal K. Si $S_T \leq K$, l'option aura donc une valeur nulle pour $t = T$. Si $S_T > K$, l'option vaudra $S_T - K$ pour $t = T$, c'est-à-dire la différence entre le prix maximal convenu K et le prix effectif S_T de l'actif à la date T. Pour une option call, on a donc $\varphi_{Call}(s) = (s - K)^+$, où x^+ vaut x si $x > 0$ et 0 sinon. L'option put assure à son détenteur de pouvoir *vendre*, à la date T, l'actif S au prix minimum K. En examinant successivement les cas $S_T \geq K$ et $S_T < K$, il est facile de voir que $\varphi_{Put}(s) = (K - s)^+$. Le nombre K s'appelle le *prix d'exercice* (ou *strike*) de l'option.

A l'instant $t = 0$ le portefeuille de couverture (a_0, b_0) doit satisfaire $a_0 S_{\delta t} + b_0 = \Pi_{\delta t}$, c'est-à-dire vérifier le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 120 + b_0 & = & a_0 S_0 u + b_0 = 50 \\ a_0 60 + b_0 & = & a_0 S_0 d + b_0 = 0 \end{array} \right. \tag{1.9}$$

On trouve immédiatement $a_0 = \frac{5}{8}$ et $b_0 = -25$ d'où $\Pi_0 = \frac{5}{8}80 - 25 = 25$. Le vendeur de l'option, dont le prix est $\Pi_0 = 25$, touche cette prime à l'instant initial, y ajoute un montant de 25 qu'il emprunte, le tout servant à acheter $\frac{5}{8}$ d'actifs à 80 pièce. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la baisse et que $S_{\delta t} = 40$, *on solde* le portefeuille ; la part en actifs ne vaut plus que $a_0 S_{\delta t} = \frac{5}{8}40 = 25$, soit exactement de quoi rembourser la dette $b_0 = 25$. Si, pour $t = \delta t$, l'actif sous-jacent a évolué à la hausse et que $S_{\delta t} = 120$, nous avons vu dans l'exemple précédent que le portefeuille doit à présent comporter $a_{\delta t} = \frac{5}{6}$; comme il y a déjà $\frac{5}{8}$ d'actifs dans le portefeuille, il convient d'en *racheter* $\frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{10}{48}$ au prix unitaire $S_{\delta t} = 120$, donc pour une valeur de $\frac{10}{48}120 = 25$, que l'on emprunte, ce qui porte la dette totale à $25 + 25 = 50$, comme dans le premier exemple, bien entendu. Le vendeu a ainsi modifié la composition de son portefeuille de couverture (sans changer sa valeur) de telle sorte qu'à l'échéance sa valeur soit exactement celle de l'option (100, 0, ou 0 selon les valeurs de $S_{2\delta t}$) : c'est le principe de la couverture dynamique.

Remarque : On peut à présent comprendre pourquoi le méchanisme de couverture dynamique d'une option décrit dans cette leçon est fondamentalement différent de celui qui permet à un assureur de couvrir un risque de vol ou d'incendie : dans le cas d'une option, le vendeur peut (à supposer que le modèle mathématique qu'il a de la dynamique de l'actif sous-jacent soit réaliste) couvrir le risque d'un seul contrat, et même le couvrir exactement, c'est-a-dire le faire disparaître. Dans le cas d'une assurance



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

FIG. 1.5 – Fonctions de paiement (ou pay-off) de quelques options standard : (a) straddel, (b) strangel, (c) bull spread, (d) bear spread, (e) butterfly spread, (f) condor. Exercice : après avoir étudié la définition d'un call et d'un put, indiquer comment au moyen d'achat et de vente de call et de put on peut synthétiser les options définies par les pay-off de cette figure.

classique au contraire, l'assureur doit avoir vendu de nombreux contrats pour, en moyenne, pouvoir faire face à ses obligations, comptant sur le fait que la probabilité pour qu'un trop grand nombre de clients aient un sinistre simultanément est suffisamment faible : c'est une couverture du risque par diversification.

Une question naturelle que cette remarque peut susciter est la suivante : si le vendeur d'une option peut, grace à la couverture dynamique, supprimer le risque, pourquoi l'acheteur ne couvre-t-il pas lui-même ce risque ? Quand au vendeur, s'il ne gagne rien à le faire, pourquoi le fait-il ? La réponse est que, dans la pratique, la couverture dynamique nécessitant un travail au jour le jour de surveillance des cours et d'ajustement de son portefeuille, est, bien entendu, rémunérée, même si nous n'en avons pas tenu compte dans les calculs ci-dessus ; l'acheteur, quant à lui, n'a pas nécéssairement envie d'assumer ce travail, d'autant qu'il subsiste une part de risque pour le vendeur si le modèle mathématique utilisé pour faire les calculs est trop grossièrement faux.

Remarque : Il est utile également d'observer ce qui se passe si le vendeur de l'option ne la couvre pas, soit qu'il n'achète aucun portefeuille de couverture avec la prime, soit qu'il achète bien, à la date initiale, le portefeuille (a_0, b_0) adapté mais ne le réajuste plus avant l'échéance. Examinons la question dans le cas de l'exemple : avec 5/8ième d'actif S_t et une dette de 25, le portefeuille acheté à la date initiale vaut à la date finale, si sa composition n'a pas été modifié dans l'intervalle, respectivement :

- $\frac{5}{8}180 - 25 = 87,5$, si le sous-jacent prend la valeur 180 ; or le vendeur doit dans ce cas 100 à l'acheteur.
- $\frac{5}{8}60 - 25 = 12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 60 ; mais le vendeur ne doit rien à l'acheteur dans ce cas, il n'a donc pas de problème.
- $\frac{5}{8}20 - 25 = -12,5$, si le sous-jacent prend la valeur 20 ; ici encore le vendeur ne doit rien à l'acheteur mais il garde une dette de 12, 5.

On voit donc sur cet exemple qu'il peut se révéler désastreux de ne pas assurer complètement la couverture dynamique.

.

Chapitre 2

Formule fondamentale dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein

L'objet de cette leçon est de généraliser le calcul du prix d'une option d'un modèle à une ou deux étapes à un modèle à n étapes, appelé *modèle de Cox, Ross et Rubinstein* ou *modèle binomial*. Cela conduira à une formule générale de prix d'option, appelée *formule fondamentale* que l'on obtient grâce à l'introduction de la *probabilité risque-neutre*, une probabilité permettant le calcul du prix d'un portefeuille de couverture. Ce sera aussi l'occasion d'aborder la notion d'*opportunité d'arbitrage*.

2.1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Le marché financier que nous considérons est un marché financier très simple qui comporte 2 actifs, un actif risqué (par exemple une action ou un indice), dont la valeur est notée S_t sur lequel sera souscrit l'option, et un actif non risqué (par exemple un dépot d'argent sur un compte rémunéré), dont la valeur est notée B_t.

J. Cox, S. Ross, et M. Rubinstein ont proposé en 1979[1]de modéliser l'évolution du prix d'un actif de la façon suivante :

– Pour une suite finie de n instants régulièrement répartis entre 0 et T, $\mathbb{T} := \{0, \delta t, 2\delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (supposé petit), la valeur $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné S_0 à l'instant $t = 0$, et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant $t \in \mathbb{T}\backslash\{n\delta t\}$ est S_t, alors sa valeur à l'instant $t + \delta t$ sera soit $S_t u$ soit $S_t d$, où u et d sont des constantes qu'on supposera telles que $0 < d < u$. Donc $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ évolue sur un *arbre binaire* qui, à tout instant $t = k\delta t \in \mathbb{T}$, présente $k + 1$ noeuds ou $k + 1$ valeurs possibles égales à :

$$\{S_0 u^j d^{k-j}, j = 0, \ldots, k\}$$

l'indice j représentant le nombre de fois où l'actif a évolué à la hausse entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = k\delta t$ (j est nombre de "up"), l'ordre des "up" et des "down" n'important pas.

– Pour la même suite d'instants $\mathbb{T}$, l'actif non risqué vaut $B_0 = 1$ à l'instant initial, et il évolue selon la récurrence $B_t = B_{t-\delta t} e^{r\delta t}$, soit $B_t = e^{rt}$, où r désigne le taux d'escompte monétaire qu'on suppose constant, pour simplifier, sur toute la période $[0, T]$.

[1]Ce modèle fait suite à un modèle introduit en 1971 indépendement par Black et Scholes, et Merton, fondé sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrète revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux *Capital Asset Pricing Model* (1964). Nous montrerons dans une leçon ultérieure les liens entre les deux approches, discrete et continue. L'approche en temps continu présente des avantages de calcul indéniables une fois que l'on maîtrise ce calcul. Mais l'approche discrète exposée ici, au dela de ses vertus pédagogiques, est parfois plus à même de modéliser des situations subtiles pour lesquelles l'approche continue peut se révèler trop limitative. Remarquons que la question du calcul des prix d'options peut également être abordée au moyen d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple le livre de P. Wilmott, S. Howison, et J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives,* Cambridge University Press (1995)). Le lien entre les deux approches, équations aux dérivées partielles/modèles aléatoires continus, est aujourd'hui bien compris.

2.2 Construction du portefeuille de couverture

On considère un call européen, souscrit sur l'actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$, d'échéance $T = n\delta t$ et de prix d'exercice K. Il s'agit donc du droit d'acheter l'actif S_t à la date T au prix K. La valeur de cette option à l'instant final (son paye off) est donc

$$C_T = (S_T - K)^+ = \text{Max}\,(S_T - K, 0) \tag{2.1}$$

c'est-à-dire que, si l'actif sous-jacent vaut $S_0 u^j d^{n-j}$ à l'instant final, pour un certain $j \in \{0, \ldots, n\}$, le call vaudra $C_T = (S_0 u^j d^{n-j} - K)^+$ pour ce même j.

Pour calculer, à partir de ces données, le prix du call à l'instant initial nous allons reprendre l'idée développée dans le cas des modèles à une et deux étapes, qui consiste à prendre pour prime de l'option la valeur initiale d'un portefeuille qui couvre l'option, c'est-à-dire dont la même valeur soit précisément celle de l'option à l'instant final. Comme pour le modèle à une ou deux étapes, nous cherchons pour définir le portefeuille Π_t par une relation de récurrence *rétrograde* ("backward") de manière à lier les inconnues Π_0, a_0, et b_0, prix initial et composition initiale, à la donnée de son paye off $(S_T - K)^+$. Cette récurrence se définit de la façon suivante : à toute date t, lorsque le sous-jacent prend la valeur S_t, le portefeuille se compose d'une certaine quantité de sous-jacent S_t, et d'une certaine quantité de placement non-risqué B_t. Comme sa composition a été arrêtée à l'instant $t - \delta t$ (il est commode de dire "la veille"), lorsqu'on ne connaissait que $S_{t-\delta t}$, et qu'elle est restée inchangée jusqu'à la date t, nous choisissons de la noter

$$a =: a_{t-\delta t} \text{ et } b =: b_{t-\delta t}.$$

Ce choix de notation est important. On a donc :

$$\delta\Pi_t = \Pi_t - \Pi_{t-\delta t} = (a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t) - (a_{t-\delta t} S_{t-\delta t} + b_{t-\delta t} B_{t-\delta t}) = a_{t-\delta t}\delta S_t + b_{t-\delta t}\delta B_t \tag{2.2}$$

où δS_t et δB_t sont des notations pour les différences $S_t - S_{t-\delta t}$ et $B_t - B_{t-\delta t}$. On peut alors recomposer le portefeuille, ayant prit connaissance de la valeur atteinte par S_t, mais par construction le portefeuille devra être *autofinancé*, c'est-à-dire que le changement de composition (couverture) intervenant à la date t devra se faire sans apport ni retrait de capitaux, c'est-à-dire en vérifiant la relation :

$$a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t = \Pi_t = a_t S_t + b_t B_t \tag{2.3}$$

Nous reviendrons sur cette *relation d'autofinancement.* On détermine la nouvelle composition de la façon suivante : désignons par S la valeur atteinte par l'actif sous-jacent à l'instant t, par Π ($\Pi := \Pi_t = a_{t-\delta t} S_t + b_{t-\delta t} B_t$) celle correspondante du portefeuille et par B celle de B_t. Deux issues sont possibles pour la valeur du sous-jacent, le "lendemain" Su et Sd, d'où résultent deux valeurs de portefeuille, que nous notons Π^u et Π^d, supposées connues par récurrence. Nous devons donc choisir la nouvelle composition (a, b) comme solution du système d'équations suivant :

$$\begin{array}{rcl} aSu + be^{r\delta t}B & = & \Pi^u \\ aSd + be^{r\delta t}B & = & \Pi^d \end{array}$$

qui se résoud immédiatement en

$$a = \frac{\Pi^u - \Pi^d}{Su - Sd} \text{ et } b = e^{-r\delta t}\frac{\Pi^d u - \Pi^u d}{B(u-d)}. \tag{2.4}$$

On pose alors $a_t = a$ et $b_t = b$ et on en déduit la valeur cherchée Π_t, par la formule $\Pi_t = a_t S_t + b_t B_t$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, toute option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est* duplicable, *c'est-à-dire qu'il existe un portefeuille autofinancé qui la couvre.*

Preuve : On raisonne par récurence sur le nombre n d'étapes du modèle. On a vu le cas d'un modèle à une étape ; pour un modèle à n étapes, on remarque simplement que, comme S_t prend deux valeurs $S_0 u$ et $S_0 d$ à l'instant δt, ces deux valeurs sont chacunes les valeurs initiales d'un modèle à $n-1$ étapes auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. D'où l'existence de deux portefeuilles de couverture $\Pi^u_{\delta t}$ et $\Pi^d_{\delta t}$ avec lesquels on peut alors calculer Π_0 (et donc C_0) comme dans un modèle à une étape. □

2.3 Probabilité risque neutre et formule fondamentale

Le calcul évoqué, bien que simple dans son principe, est lourd dans sa mise en oeuvre (résolution d'un grand nombre de systèmes d'équations) ? Nous allons voir à présent comment on peut le simplifier grâce à l'introduction d'un formalisme probabiliste.

La remarque cruciale est la suivante : si l'on calcule la valeur du portefeuille $\Pi = aS + bB$ en utilisant les solutions (a, b) trouvées en (2.4), on voit facilement qu'on peut réécrire Π comme une fonction de Π^u et Π^d, sous la forme

$$\Pi = e^{-r\delta t}(p\Pi^u + q\Pi^d), \tag{2.5}$$

si l'on introduit les quantités

$$p := \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \text{ et } q := \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d}. \tag{2.6}$$

Or il est facile de vérifier que ces quantités sont telles que $p + q = 1$ et que, si l'on suppose, ce que nous ferons désormais, que $0 < d < e^{r\delta t} < u$, ces quantités p et q vérifient aussi $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. Donc si l'on considère que Π^u et Π^d sont les deux valeurs que peut prendre une v.a. de Bernouilli Π avec $P(\Pi = \Pi^u) = p$ et $P(\Pi = \Pi^d) = q$ alors l'équation (2.5) affirme simplement que Π est précisement le produit par le *facteur d'actualisation*, $e^{-r\delta t}$, de l'espérance de cette v.a., c'est-à-dire *l'espérance actualisée* de cette v.a.. Les valeurs p et q ainsi définies se calculent directement en fonction de u, d et r, donc à partir des données du modèle choisi $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Mais elles ont aussi une autre propriété essentielle : on a en effet

$$S = e^{-r\delta t}(pSu + qSd), \tag{2.7}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$S_{t-\delta t} = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(S_t \text{ connaissant } S_{t-\delta t}).$$

On appelle *probabilité risque-neutre* la probabilité $(p, 1 - p)$ et c'est avec elle que l'on pourra calculer les prix d'options, directement et sans recourir à la résolution d'un grand nombre de petits systèmes linéaires. On la désigne aussi sous le nom de *probabilité de calcul*, ou encore *probabilité de martingale* pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons.

La probabilité risque-neutre permet de munir le modèle de l'actif sous-jacent (S_t) d'une structure de *marche aléatoire*, c'est-à-dire que, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, les $k + 1$ valeurs $\{S_0u^jd^{k-j}, j = 0, \ldots, k\}$ que peut prendre S_t sont les $k + 1$ valeurs possibles d'une v.a. dont la loi est donnée par :

$$P(S_t = sS_0u^jd^{k-j}) = \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} p^j(1 - p)^{k-j}. \tag{2.8}$$

En effet la valeur $S_0u^jd^{k-j}$ atteinte par S_t correspond à une trajectoire qui présente j “montées” et $k - j$ “descentes” dont la probabilité est $p^j(1 - p)^{k-j}$ si l'on fait l'hypothèse que ces mouvements, à la hausse ou à la baisse, sont indépendants, et il est facile de voir qu'il y a exactement $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}$ trajectoires qui atteignent cette valeur. La formule (2.8) explique le nom de modèle binomial que l'on donne souvent au modèle Cox-Ross-Rubinstein. On a la proposition suivante que l'on obtient par un raisonnement par récurrence comme dans la preuve de la proposition précédente, en utilisant la relation de récurrence retrograde (2.5) et (2.6), ainsi que les propriétés des coefficients du binôme :

Proposition 2.2 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où S_t suit un modèle CRR, le prix d'une option européenne $(T, \varphi(S_T))$ est donnée par*

$$e^{-rT}\mathbb{E}(\varphi(S_T)) = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1 - p)^{n-j}\varphi(S_0u^jd^{n-j}) \tag{2.9}$$

c'est-à-dire que ce prix est la valeur actualisée de l'espérance, sous la probabilité de calcul, de sa fonction de paiement ; ainsi, pour une option call, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (S - K)^+$, on a

$$C_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1 - p)^{n-j}(S_0u^jd^{n-j} - K)^+$$

et pour le cas d'un put, c'est-à-dire si $\varphi(S) = (K - S)^+$, on a

$$P_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j(1 - p)^{n-j}(K - S_0u^jd^{n-j})^+.$$

La formule (4.3) s'appelle la *formule fondamentale* pour l'évaluation du prix d'une option européenne dans un modèle de Cox, Ross, et Rubinstein.

Exemple : Si l'on revient à l'exemple de modèle à deux étapes donné à la leçon précédente, le calcul de la prime C_0 peut se faire à présent simplement : on détermine la probabilité de calcul définie par la relation $S = pSu + (1-p)Sd$ (on a supposé $r = 0$) ; on obtient $p = \frac{1}{2} = 1 - p$; puis on calcule C_0 comme l'espérance $C_0 = 100P(S_T = 180) + 0P(S_T = 60) + 0P(S_T = 20) = 100(\frac{1}{4}) = 25$.

Remarque : Notons que si la formule fondamentale donne immédiatement le prix de l'option, elle ne donne pas directement la composition du portefeuille de couverture.

2.4 Hypothèses du modèle

La formule fondamentale ci-dessus (formule (4.3) a été obtenue sous l'hypothèse explicite que le modèle choisi pour la dynamique de l'actif sous-jacent est le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein. Mais il y a en fait d'autres hypothèses, économiques, qui ont été faites implicitement, et que nous allons étudier à présent.

- La plus irréaliste, mais difficilement contournable, est celle que l'on appelle l'hypothèse de *marché parfait.* Elle suppose d'une part que le marché est *infiniment liquide : à* tout instant, il existe des acheteurs et des vendeurs pour tous les titres du marché ; elle suppose aussi qu'il n'y a aucune contrainte sur les quantités d'actifs achetés ou vendus (opérations nécessaires pour assurer la couverture dynamique des options) ; en particulier, les titres sont supposés infiniment divisibles, et les agents sans de limitation de découvert. Enfin un marché parfait suppose aussi l'absence de coûts de transaction ainsi que l'égalité des prix à l'achat et à la vente (pas de fourchette bid-ask).
  L'hypothèse de marché parfait est une hypothèse théorique, évidemment non satisfaite dans la pratique, qu'il convient de considérer comme "satisfaite en première approximation", un peu comme l'hypothèse de gaz parfait en physique. Les modèles mathématiques plus élaborés que le modèle CRR cherchent parfois à s'en affranchir sur tel ou tel aspect. Mais il faut reconnaître que, pour l'essentiel, on ne sait pas le faire aujourd'hui de façon satisfaisante et qu'il reste beaucoup à améliorer dans cette direction.
- La seconde hypothèse est celle, déja mentionnée, de *taux d'escompte monétaire constant.* Nous avons par exemple supposé qu'un actif valant S_t à l'instant t a une valeur actuelle, en $t = 0$, égale à $e^{-rt}S_t$. Or, durant la période $[0, t]$, le taux d'escompte varie en réalité et ce qui pourrait être une approximation raisonnable si t était très petit, cesse d'être valable lorsque t devient appréciable. Les modèles plus élaborés font parfois l'hypothèse d'un taux d'escompte stochastique et on peut alors, moyennant le choix d'un modèle mathématique pour la dynamique des taux, intégrer dans la probabilité de calcul, et donc dans l'évaluation des prix d'option par la formule fondammentale, la présence de taux variables.
- La troisième hypothèse est l'*absence de dividendes* versés par les actifs sous-jacents. En fait, il existe des modèles analogues au modèle CRR qui autorisent la prise en compte de dividende.
- La dernière hypothèse est probablement la plus importante : elle porte le nom d'hypothèse d'*absence d'opportunité d'arbitrage* (simplement notée AOA) et joue un rôle essentiel.

  Définition : Une opportunité d'arbitrage est un portefeuille autofinançant nul en $t = 0$ ($\Pi_0 = 0$) et tel que $\Pi_T \geq 0$ dans tous les états du monde et $P(\Pi_T > 0) > 0$.

  Proposition 2.3 *Dans un marché dans lequel on fait l'hypothèse d'AOA, deux portefeuilles qui ont la même valeur à une date future T, ont la même valeur à toutes dates intermédiaires* $0 < t < T$.
  En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait former un portefeuille composé du premier Π_t(en crédit), du second $-\tilde{\Pi}_t$ en débit, et d'une somme d'argent égale à la différence $\alpha := \Pi_t - \tilde{\Pi}_t$ placée au taux r. Si par exemple on suppose, par l'absurde, $\alpha > 0$, alors ce portefeuille est une opportunité d'arbitrage :

$t \in [0, T[$	T
Π_t	Π_T
$-\tilde{\Pi}_t$	$-\tilde{\Pi}_T$
α	$\alpha e^{r(T-t)}$
0	> 0

  L'hypothèse d'AOA permet aussi de justifier les inégalités qui ont été supposées satisfaites par l'actif risqué du modèle CRR :

$$0 < d < e^{r\delta t} < u. \tag{2.10}$$

En effet comme $e^{r\delta t}$ est le rendement $\frac{B_t}{B_0}$ de l'actif non risqué durant le laps de temps δt, et comme d et u sont les deux rendements possibles $\frac{S_t}{S_0}$ de l'actif risqué sur le même laps de temps, si l'on avait $d < u < e^{r\delta t}$ par exemple, on aurait une opportunité d'arbitrage :

t	$t + \delta t$
$-S_t$	$-S_t d$ ou $-S_t u$
α	$\alpha e^{r\delta t}$
0	$S_t(e^{r\delta t} - d)$ ou $S_t(e^{r\delta t} - u)$

Car si α est une somme d'argent égale à S_t et placée au taux r, le portefeuille représenté dans ce tableau est une opportunité d'arbitrage. On raisonnerait de façon analogue dans le cas $e^{r\delta t} < d < u$, avec $+S_t$ et $-\alpha$.

Remarque : Une opportunité d'arbitrage est parfois appelée un *free lunch* (et l'hypothèse d'AOA, *no free lunch*), ce qui résume l'idée que sous cette hypothèse il n'y a pas de possibilité de gagner d'argent à coup sûr, c'est-à-dire sans prendre de risque.

Remarque : C'est encore un raisonnement d'AOA qui rend plausible l'unicité du prix de l'option. En effet nous avons choisi pour prix de l'option celui d'un portefeuille de couverture. Mais pourquoi n'y aurait-il pas une autre façon de s'y prendre qui conduirait à un prix différent, disons un prix moindre par exemple ? En réalité ce n'est pas possible car si tel était le cas, un portefeuille comprenant l'option, vendue à un prix C_0 strictement inférieur au prix du portefeuille de couverture Π_0, le portefeuille de couverture lui-même en débit et une somme $\Pi_0 - C_0$, serait une opportunité d'arbitrage comme l'indique le tableau suivant :

$t = 0$	$t = T$
C_0	C_T
$-\Pi_0$	$-\Pi_T$
$\Pi_0 - C_0$	$(\Pi_0 - C_0)e^{rT}$
0	> 0

Enfin une conséquence de l'AOA, importante dans la pratique, est la *relation de parité call-put :*
Proposition 2.4 *Considérons un call C_t et un put P_t souscrits sur le même actif sous-jacent S_t, de même date d'échéance T et même prix d'exercice K. On a la relation de parité call-put suivante :*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{r(T-t)}$$

Preuve : On applique la proposition 2.3 : les portefeuilles $\Pi_t := C_t - P_t$ et $\tilde{\Pi}_t := S_t - Ke^{r(T-t)}$ ont même valeur à l'échéance $t = T$ puisque l'on a $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$. $\square$

.

Bibliographie

[1] Martin Baxter and Andrew Rennie. *Financial calculus.* Cambridge University Press, 1999.

[2] Thomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time.* Oxford University Press, 2004.

[3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–659, 1973.

[4] Nicolas Bouleau. *Martingales et marchés financiers.* Editions Odile Jacob, 1998.

[5] John Cox, Stephen Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing : A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–263, 1979.

[6] Rose-Anne Dana and Monique Jeanblanc-Piqué. *Marchés financiers en temps continu.* Economica, 1998.

[7] John Hull. *Options, Futures, and other derivatives.* Prentice-Hall, 1997.

[8] Jean Jacod and Philip Protter. *L'essentiel en théorie des probabilités.* Cassini, 2003.

[9] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39 of *Application of Mathematics, stochastic modelling and applied probability.* Springer, 1998.

[10] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, volume 9 of *Mathématiques et applications.* Ellipse, 1993.

[11] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale methods in Financial modelling*, volume 36 of *Applications of mathematics.* Springer, 1997.

[12] Stanley R. Pliska. *Introduction to mathematical finance, discrete time models.* Blackwell publishers, 1997.

[13] Albert N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance*, volume 3 of *Advanced series on statistical science and applied probability.* World scientific, 1999.

[14] Paul Wilmott. *Derivatives.* John Wiley and sons, 1998.

[15] Paul Wilmott, Sam Howison, and Jeff Dewynne. *The mathematics of financial derivatives.* Cambridge University Press, 1995.